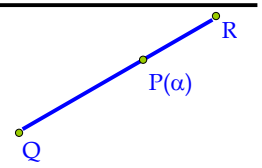
Geometric Objects and Transformation

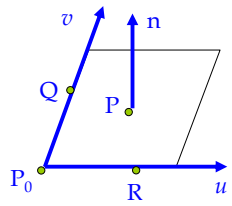
321190
2007년 봄학기
4/10/2007
박경신

Geometric Objects

- Line
  - 2 points: R, Q
  - v = R- Q
    P = Q + αv = Q + α(R - Q) = αR + (1 – α)Q
  - P = α_1R + α_2Q where $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (affine sum)



- Plane
  - 3 points: P_0, Q, R
  - T(α, β) = P + αu + βv
  - n•(P – P_0) = 0 where n = u x v



- 3D objects
  - 3차원 공간 내의 정점들의 집합
  - 표면에 의해 기술되고, 속이 비었다 (hollow).
  - 평면 볼록 다각형 (convex polygons)으로 구성될 수 있다.
  - 임의의 다각형 (arbitrary polygons)은 삼각 다각형(triangular polygons)으로 분할(tessellate)된다.

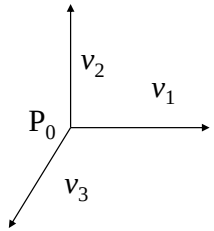
Coordinate Systems

- 기저벡터 (basis), $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- 임의의 벡터 v는 $v=\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$
- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$는 기저에 대한 w의 성분(component) 이다.
- 기저에 대한 v의 표현 (representation)을 행 행렬 또는 열 행렬로 기술 할 수 있다.

$$\mathbf{a}=[\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \ldots \; \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Frames

- 아핀공간 (affine space)은 점(point)을 포함한다.
- 원점(origine)으로부터 기저벡터로 좌표축을 그리는 표현을 프레임 (frame)이라 부른다.
- 프레임: (P_0, v_1, v_2, v_3)
- 프레임에서 벡터의 표현: $v=\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$
- 프레임에서 점의 표현: $P = P_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$



$\mathbf{v} = [\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \; 0]^T$
$\mathbf{p} = [\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; 1]^T$

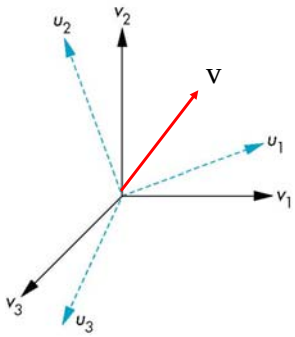
Change of Coordinate Systems

- 예를 들어, OpenGL에서는 모델 좌표계를 이용해서 기하를 정의한다. 그리고 세계 좌표계로 옮겨진다.
- 2개의 다른 기저벡터 $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$

$$u_1 = \gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

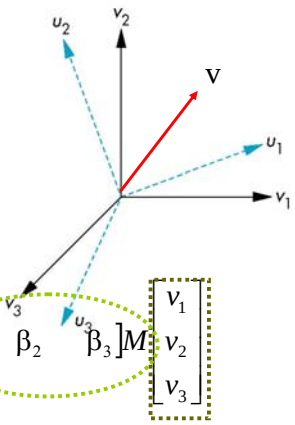
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



Change of Coordinate Systems

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}}_{a^T} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}}_{b^T} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

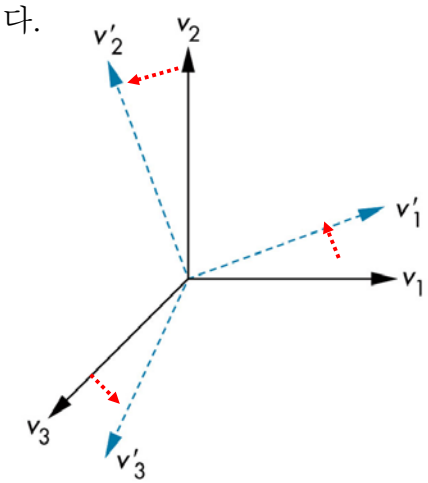


$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{a} = M^T \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{b} \quad \therefore \mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{b} \quad \therefore \mathbf{b} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{a}$$

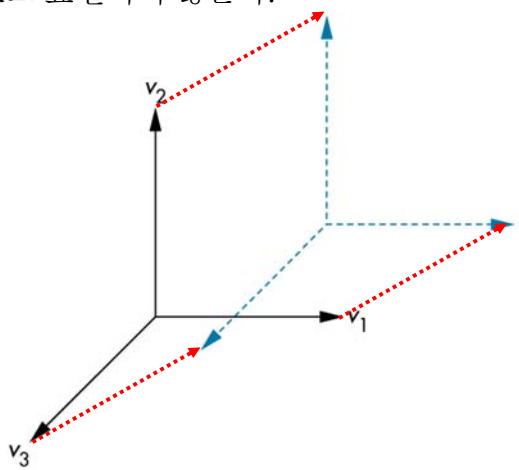
Rotation and Scaling of a Basis

- 기저 벡터들의 집합의 회전(rotation)과 크기(scaling) 변환을 표현함으로써 다른 기저 벡터들의 집합을 유도할 수 있다.



Translation of a Basis

- 그러나, 간단한 원점의 이동(translation) 변환은 3x3 matrix로 표현되지 않는다.

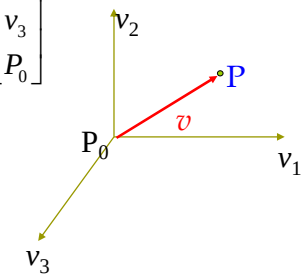


Homogeneous Coordinates

$$\textbf{vector}\ v = \sum \alpha_i v_i = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{point}\ P = P_0 + \sum \alpha_i v_i = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

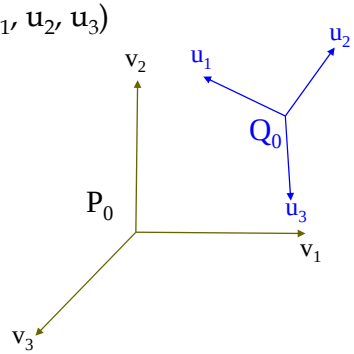
$$P = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0\end{bmatrix}$$



Change of Frames

- 2개의 프레임 (P_0, v_1, v_2, v_3) (Q_0, u_1, u_2, u_3)

$u_1 = \gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3$
$u_2 = \gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3$
$u_3 = \gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3$
$Q_0 = \gamma_{41}v_1+\gamma_{42}v_2+\gamma_{43}v_3+\gamma_{44}P_0$



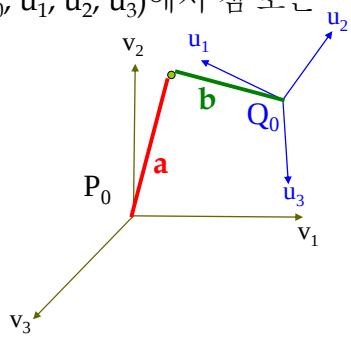
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Change of Frames

- a, b는 두 프레임 (P_0, v_1, v_2, v_3) (Q_0, u_1, u_2, u_3)에서 점 또는 벡터의 동차 좌표 표현이다.

$$b^T\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = b^T\mathbf{M}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix} = a^T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = \mathbf{M}^T b$$

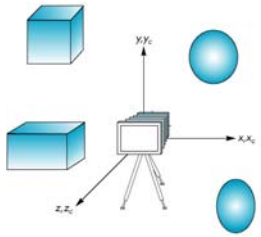
$$\therefore b = (\mathbf{M}^T)^{-1} a$$

OpenGL Frames

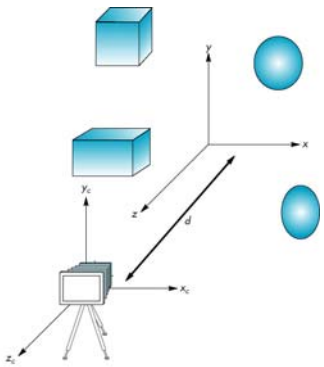
- 객체(모델) 좌표계 (model-view coordinate system)
- 세계 좌표계 (world coordinate system)
- 눈(카메라) 좌표계 (camera coordinate system)
- 투영변환 및 클리핑 (clipping coordinate system)
- 정규화 장치 좌표계 (normalized device coordinate system)
- 윈도우(화면) 좌표계 (screen coordinate system)

Moving the Camera

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



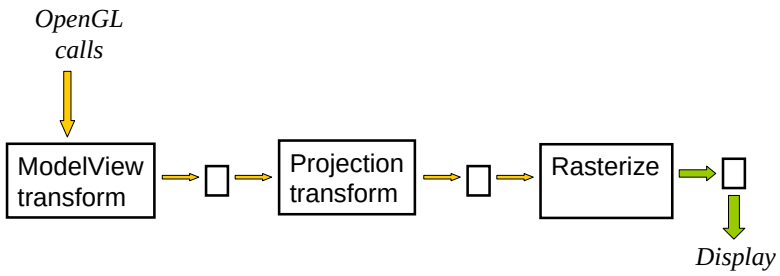
Camera frame & world frame



모델-관측 행렬을 적용한 후

Transformations

- 변환 (transformation)은 점(또는 벡터)을 취하여 그 점을 다른 점으로 매핑시키는 함수이다.
- OpenGL에서는 2차원 (x, y) 좌표를 3차원 (x, y, z)에서 z=0인 경우로 취급한다.

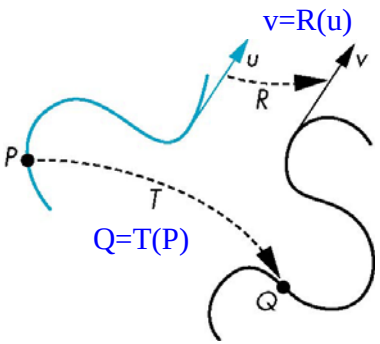


General Transformations

- 동차좌표를 사용한다면 벡터와 점을 4차원 열 행렬로 나타낼 수 있고, 주어진 프레임에서 점과 벡터의 표현을 변환하는 단일 함수 f로 변환을 정의할 수 있다.

  q = f(p)

  v = f(u)



Affine Transformations

- 아핀변환 (affine transformation)은 선형성(colinearity)을 유지한다.
  - 즉, 직선을 보존한다. 한 선에 있는 모든 점이 변환 후에도 변환된 선 상에 존재 한다.
- 또한, 거리의 비례(ratio of distance)를 유지한다.
  - 즉, 한 선분의 중점 (midpoint of a line)이 변환 후에도 변환된 선분의 중점에 위치한다.
- $P' = f(P)$
- $P' = f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2)$

Affine Transformation

- 컴퓨터 그래픽스에서 필요로 하는 변환의 대부분은 아핀 변환이다. 아핀변환은 이동 (Translation), 회전 (Rotation), 크기변환 (Scaling), 밀림 (Shearing)을 포함한다.
- 변환된 점 P′ (x′, y′, z′)는 원래 점 P (x, y, z)의 선형조합 (linear combination)으로 표현할 수 있다., i.e.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Affine Transformation

- 변환된 점 P′ (x′, y′)는 원래 점 P (x, y)의 선형조합 (linear combination)으로 표현할 수 있다., i.e.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} \\ \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometric Transformation

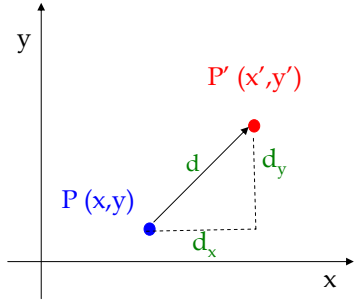
- 기하학적 객체의 변환(geometric transformation)이란 하나 또는 그 이상의 기하학적 객체를 묘사하는 점의 그룹을 새로운 위치로 옮기는 함수를 의미한다.
- 이 때, 객체들의 정점들 사이의 관계를 유지하면서 하나의 변환으로 점들을 새로운 위치로 옮긴다.
- Basic transformation
  - 이동 (Translation)
  - 회전 (Rotation)
  - 크기변환 (Scaling)

2D Translation

- 이동 (translation)은 주어진 방향으로 일정한 거리 d (d_x, d_y, d_z)만큼 점 P(x, y)을 옮겨서 새로운 점 P′(x′, y′)을 찾는 연산이다.

$x' = x + d_x$

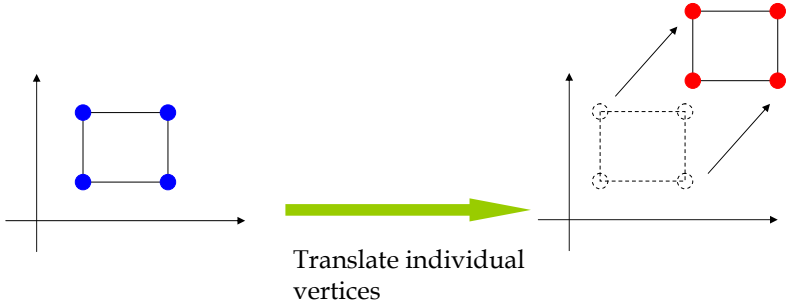
$y' = y + d_y$



$P' = P + d$ where $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$

Translation

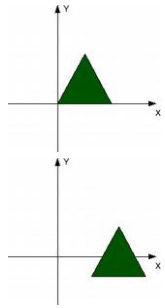
- 다수의 정점을 갖고 있는 객체를 이동한다면?



Translation in OpenGL

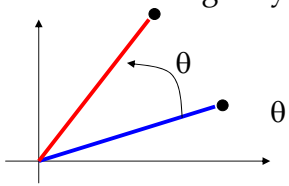
- glTranslatef(x, y, z)
  - 객체를 (x, y, z)만큼 이동
  - 2차원 glTranslate 함수는 없다.
- Example:

```
glTranslatef(0.5, -0.2, 0.0);
glBegin(GL_TRIANGLES);
glVertex2f(0.0, 0.0);
glVertex2f(0.5, 0.0);
glVertex2f(0.25, 0.5);
glEnd();
```

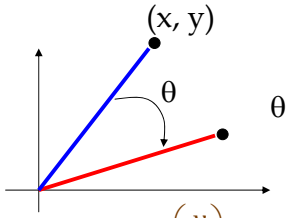


Rotation

- 2차원 점이 원점(0,0)에 대해 각도 θ 만큼 회전 (2D rotation about the origin by θ)



θ > 0 : Rotate counter clockwise in RHS



θ < 0 : Rotate clockwise in LHS

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

2D Rotation

- Rotation of a point P(x,y) by θ about an origin (0,0)

$x = r\cos(\phi)$ $\quad y = r\sin(\phi)$

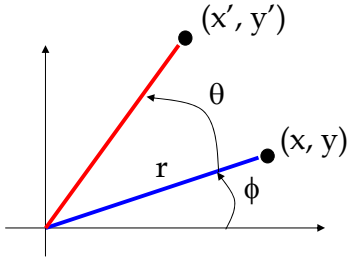
$x' = r\cos(\phi + \theta)$ $\quad y' = r\sin(\phi + \theta)$

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\phi + \theta) \\ &= r\cos(\phi)\cos(\theta) - r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\phi + \theta) \\ &= r\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ &= y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{aligned}$$

$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$

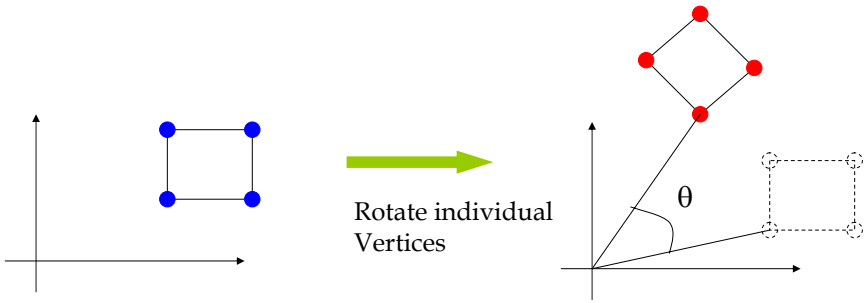
$y' = y\cos(\theta) + x\sin(\theta)$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2D Rotation

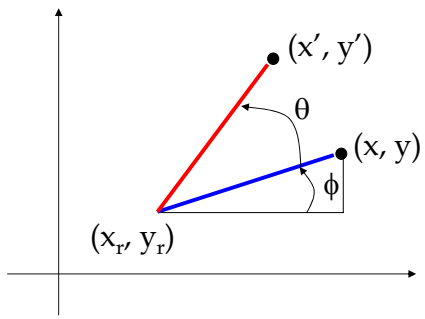
- 다수의 정점을 갖고 있는 객체를 회전한다면?



2D Rotation about an Arbitrary Pivot

- Rotation of a point P(x,y) by θ about an arbitrary pivot point, (x_r, y_r) : $P' = R(\theta)\, P$

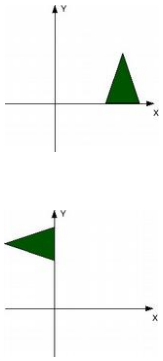
$$x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\sin\theta$$
$$y' = y_r + (x - x_r)\sin\theta + (y - y_r)\cos\theta$$



Rotation in OpenGL

- glRotatef(angle, x, y, z)
  - 임의의 축 axis (x,y,z)에 대해 각도 angle (라디안값)만큼 회전
  - 2차원 회전은 z-축 (0, 0, 1)로 사용한다.
- Example:

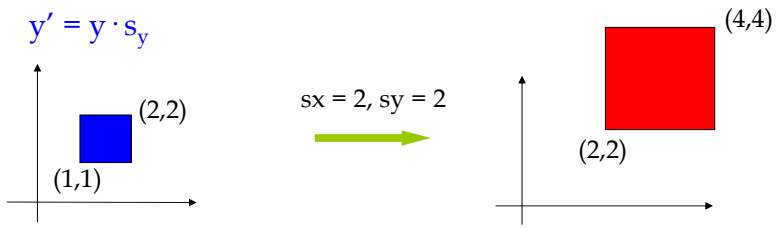
```
glRotatef(90.0, 0.0, 0.0, 1.0);
glBegin(GL_TRIANGLES);
glVertex2f(0.5, 0.0);
glVertex2f(0.8, 0.0);
glVertex2f(0.65, 0.5);
glEnd();
```



2D Scale

- 크기변환 (scaling)은 객체를 scaling factor (s_x, s_y)로 크게 만들거나 작게 만들 수 있다. 즉, 아핀 비강체 (affine non-rigid-body transformation) 변환이다.
- 크기 변환은 고정점(pivot point)을 가진다. 따라서 객체의 크기만 커지는 것이 아니라 위치도 바뀌게 된다.

$$x' = x \cdot s_x$$
$$y' = y \cdot s_y$$



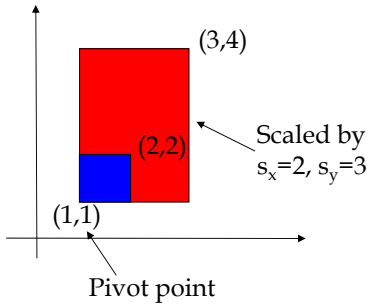
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2D Scale about an Arbitrary Pivot

- Scale a point P(x,y) by a scaling factor relative to an arbitrary pivot point, (x_f, y_f) : $P' = S(s_x, s_y)\,P$

$$x' = x_f + (x - x_f)\,s_x$$
$$y' = y_f + (y - y_f)\,s_y$$

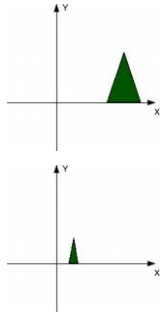
$$x' = x\,s_x + x_f\,(1 - s_x)$$
$$y' = y\,s_y + y_f\,(1 - s_y)$$



Scale in OpenGL

- glScalef(x, y, z)
  - x-축으로 x만큼, y-축으로 y만큼, z-축으로 z만큼 크기를 변환
  - 이 때, scale factor>1이면 커지고, 0<scale factor<=1이면 작아지고, scale factor<0면 반사(reflection)된다.
  - 2차원 크기변환은 z에 1을 넣는다.
- Example:

```
glScalef(0.25, 0.5, 1.0);
glBegin(GL_TRIANGLES);
glVertex2f(0.5, 0.0);
glVertex2f(0.8, 0.0);
glVertex2f(0.65, 0.5);
glEnd();
```



2D Reflection (Mirror)

- 반사 (Reflection)는 고정점에 대하여 객체가 반대방향으로 변환되는 것이다.
  - 반사는 각도 (angles)과 크기 (lengths)를 보존한다.
- 2D reflection over x axis

  $x' = x$

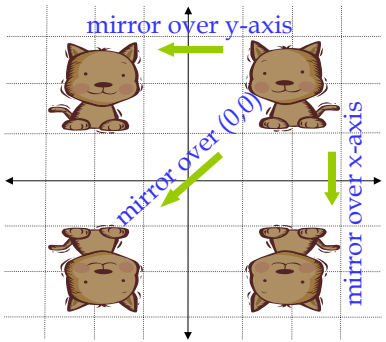
  $y' = -y$
- 2D reflection over y axis

  $x' = -x$

  $y' = y$
- 2D reflection over (0,0)

  $x' = -x$

  $y' = -y$

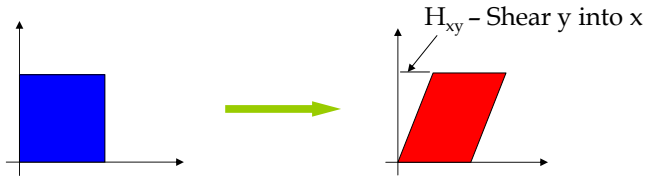


2D Shearing

- Y-축은 변하지 않고, x-축 방향으로 밀림(shearing) 변환한다:

$$x' = x + y \cdot h_{xy}$$
$$y' = y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_{xy} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



2D Shearing

- 밀림 (Shearing)변환은 객체의 크기에 변화를 주지 않는다.
- X-축은 변하지 않고, y-축 방향으로 밀림 변환한다:

$$x' = x$$

$$y' = x \cdot h_{yx} + y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_{yx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeneous Coordinates

- 이동, 회전, 크기변환 행렬을 곱하기 위하여 동차좌표 (homogeneous coordinates)에서의 변환행렬로 바꿔서 사용한다.
- 동차 좌표는 2차원의 점 P (x, y)는 P (x, y, w)로 표현한다.
- (1, 2, 3)과 (2, 4, 6)은 같은 동차좌표 표현이다.
- 만약 점 P (x, y, w)의 w가 0이면, 그 점은 무한지점에 위치한다. 만약 w가 0가 아니라면, 그 점은 (x/w, y/w, 1)로 표현할 수 있다.

Transforming Homogeneous Coordinates

$$T(dx, dy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(sx, sy) = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2차원 변환행렬은 동차좌표의 3x3 행렬로 표현할 수 있다.

3x3 2D Translation Matrix

- 행렬과 벡터의 곱 (matrix-vector multiplication)으로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3x3 2D Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3x3 2D Scale Matrix

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3x3 2D Shearing Matrix

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{xy} \\ h_{yx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{xy} & 0 \\ h_{yx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Inverse 2D Transformation Matrix

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composing Transformation

- *Composing transformation* 이란 여러 개의 변환을 순서대로 적용시켜서 하나의 변환을 이루는 과정이다.
- 한 점을 변환하려고 한다면 한번에 한 개의 변환의 적용을 하거나 행렬의 곱셈을 수행한 후에 이 행렬을 점에 곱한다.

$$Q = (M3 \cdot (M2 \cdot (M1 \cdot P))) = \underbrace{M3 \cdot M2 \cdot M1}_{M} \cdot P$$

(pre-multiply)

- 행렬의 곱은 결합법칙 (associative)을 만족한다.

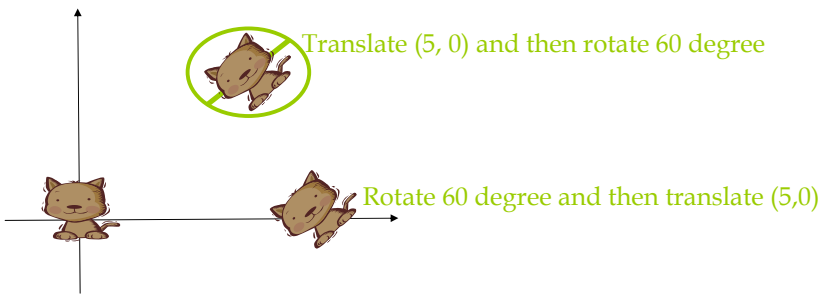
$$M3 \cdot M2 \cdot M1 = (M3 \cdot M2) \cdot M1 = M3 \cdot (M2 \cdot M1)$$

- 행렬의 곱은 교환법칙 (commutative)이 성립하지 않는다.

$$A \cdot B \; != B \cdot A$$

Transformation Order Matters!

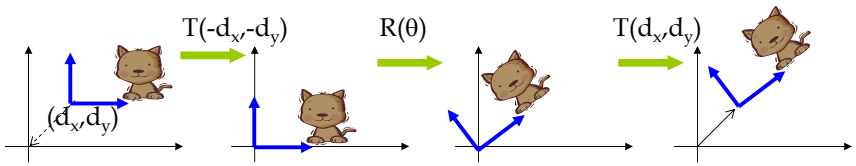
- 변환 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다.
- 만약 같은 변환 행렬이라 하더라도 곱하는 순서에 따라 완전히 다른 결과를 가질 수 있다.



2D Rotate about an Arbitrary Pivot

- To rotate about an arbitrary pivot point $P(d_x, d_y)$ by θ:
  - Translate the object so that $P(d_x, d_y)$ will coincide with the origin, $T(-d_x, -d_y)$
  - Rotate the object, $R(\theta)$
  - Translate the object back, $T(d_x, d_y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x(1-\cos\theta)+d_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & d_y(1-\cos\theta)+d_x \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

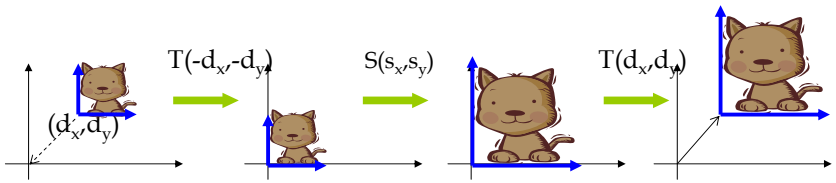


$$T(-d_x,-d_y) \cdot R(\theta) \cdot T(d_x,d_y) = R(d_x, d_y, \theta)$$

2D Scale about an Arbitrary Pivot

- To scale about an arbitrary pivot point $P(d_x, d_y)$:
  - Translate the object so that $P(d_x, d_y)$ will coincide with the origin, $T(-d_x, -d_y)$
  - Scale the object, $S(s_x, s_y)$
  - Translate the object back, $T(d_x, d_y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & d_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & d_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

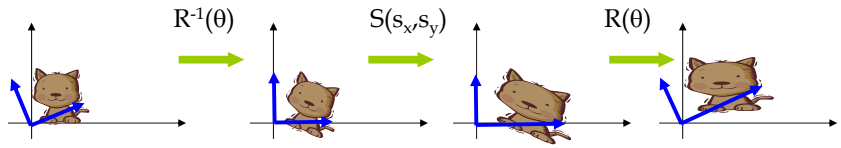


$$T(-d_x,-d_y) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(d_x,d_y) = S(d_x, d_y, s_x, s_y)$$

2D Scale in an Arbitrary Direction

- To scale an object in an arbitrary direction (*by rotating the object to align the desired scaling directions with the coordinate axes* before scale transformation)
  - Rotate clockwise by θ, $R^{-1}(\theta)$
  - Scale about the origin, $S(s_x, s_y)$
  - Rotate counterclockwise by θ, $R(\theta)$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x\cos^2\theta+s_y\sin^2\theta & (s_x-s_y)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ (s_x-s_y)\cos\theta\sin\theta & s_y\cos^2\theta+s_x\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Example: 2D Rotate about an Arbitrary Pivot Using Composite Transformation Matrix

- 정점 (1,1), (3,1), (3,4)를 갖는 한 삼각형을 점 (2,2)에 대하여 45도 회전하라.
- P′= T(2,2)R(45)T(-2,-2)P = M P

$$M = T_{(2,2)}R_{45}T_{(-2,-2)})$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} .707 & -.707 & 2 \\ .707 & .707 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .707 & -.707 & 2 \\ .707 & .707 & -.828 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$$

Example: 2D Rotate about an Arbitrary Pivot Using Composite Transformation Matrix

A triangle with vertices (1,1), (3,1), (3,4) rotated about (2,2)

1. P_1

$$P_1' = MP_1 = \begin{bmatrix} .707 & -.707 & 2 \\ .707 & .707 & -.828 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ .586 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. P_2

$$P_2' = MP_2 = \begin{bmatrix} .707 & -.707 & 2 \\ .707 & .707 & -.828 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.414 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. P_3

$$P_3' = MP_3 = \begin{bmatrix} .707 & -.707 & 2 \\ .707 & .707 & -.828 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.293 \\ 4.121 \\ 1 \end{bmatrix}$$