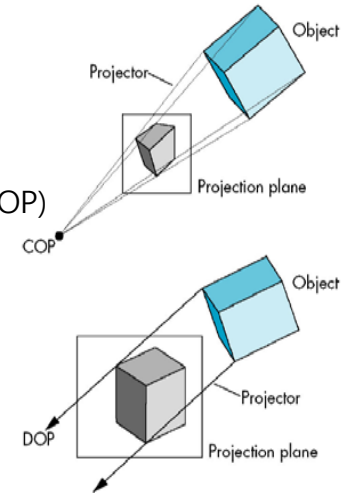


# Viewing

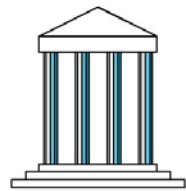
514780  
2018년 가을학기  
11/1/2018  
단국대학교 박경신

# Viewing

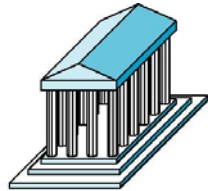
- 관측의 기본요소
  - 객체 (Objects)
  - 관측자 (Viewer)
  - 투영선 (Projector)
  - 투영면 (Projection plane)
- 투영중심 (Center of Projection: COP)
  - COP가 유한한 경우 –  
투시관측 (Perspective views)
  - COP가 무한한 경우 –  
평행관측 (Parallel views)



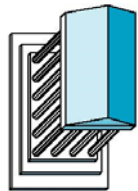
# Classical Viewing



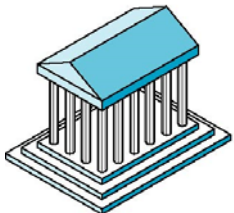
Front elevation  
전면관측



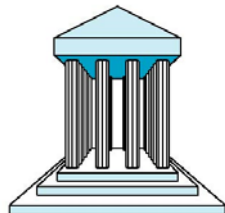
Elevation oblique  
측면경사관측



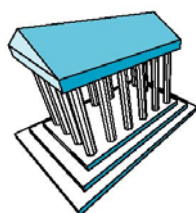
Plan oblique  
평면경사관측



Isometric  
등축관측

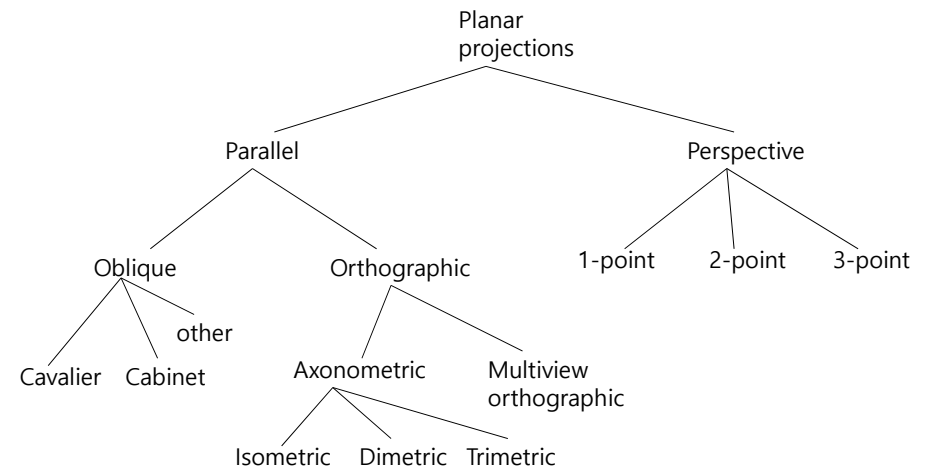


One-point perspective  
1-소실점 투시관측

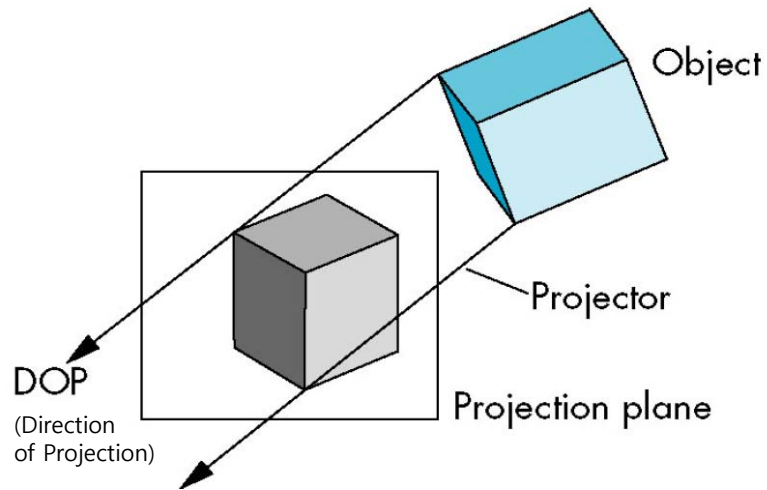


Three-point perspective  
3-소실점 투시관측

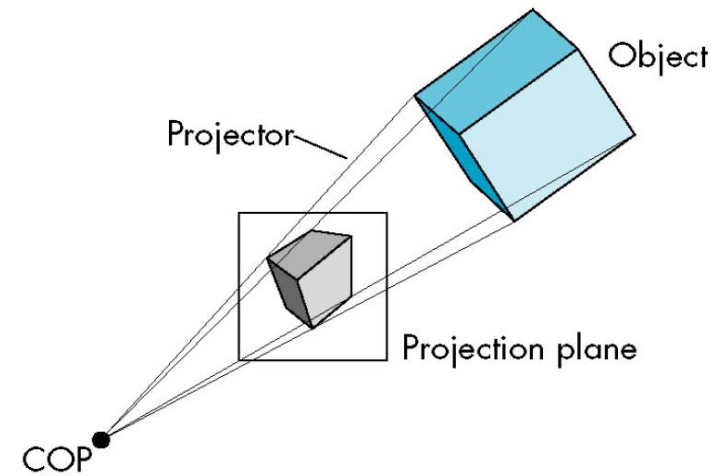
# Classical Viewing



## Parallel Viewing

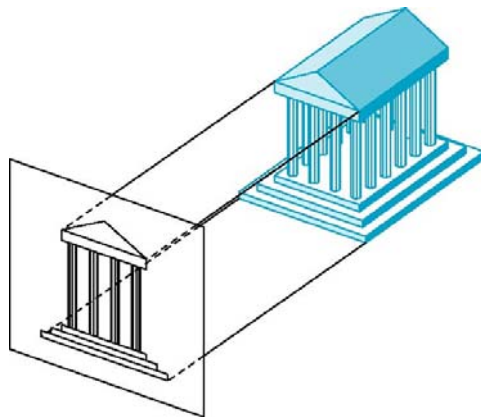


## Perspective Viewing



## Orthographic Projection

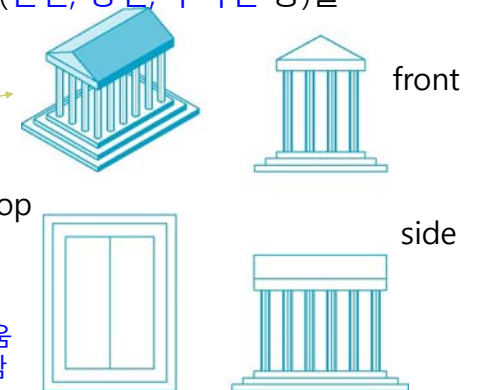
- 직교 투영 (Orthographic Projection)에서는 투영선 (Projector)은 투영면 (Projection plane)에 수직이다.



## Multiview Orthographic Projection

- 다중 관측 직교 투영 (Multiview Orthographic Projection)에서는 여러 개의 투영면을 만드는데, 각각은 객체의 주면 (principal face) 중 하나와 평행하다.
- 일반적으로 세 개의 관측 (전면, 상면, 우측면 등)을 표시한다.

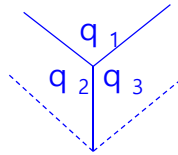
Isometric (not multiview orthographic view)



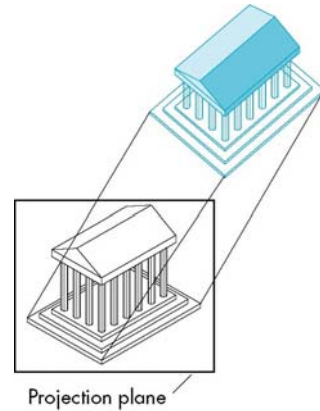
- 거리와 각이 모두 보존됨
- 또한, 거리와 모양의 왜곡이 없음
- 그러나, 다중관측직교투영으로부터 객체가 어떻게 생겼는지 추측이 어려움
- 그래서, Isometric view과 함께 제공함

## Axonometric Projections

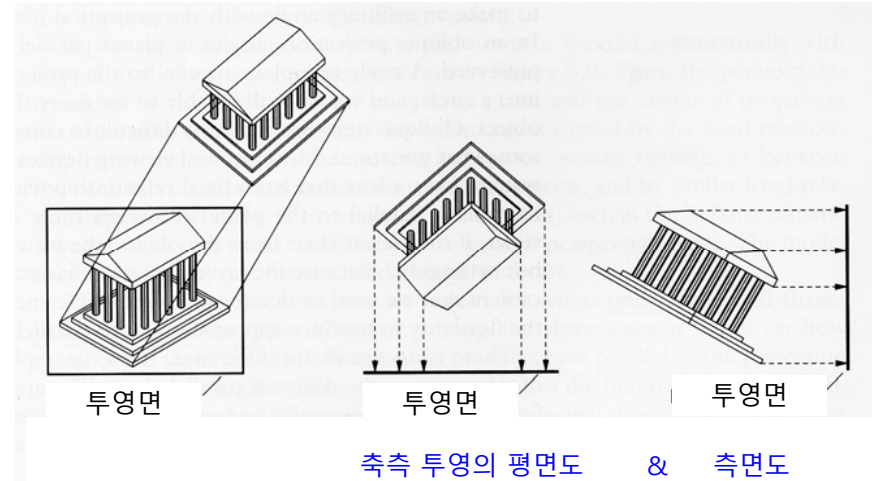
- 축측 관측 (Axonometric view)에서 투영선은 투영면에 수직이지만, 투영면은 객체에 대해 어떠한 방향에도 존재할 수 있다.



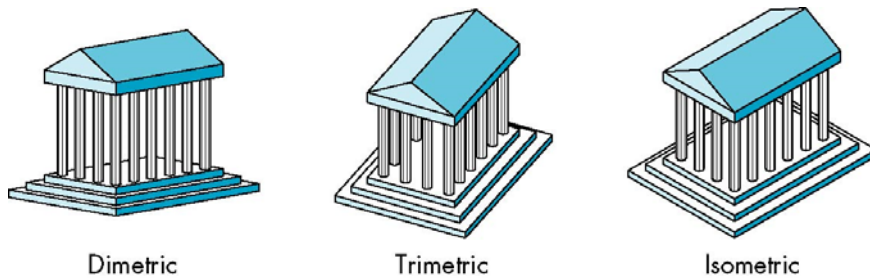
- 등축투영 (isometric) - 만일 투영면이 사각형 객체의 모서리에서 만나는 세 개의 주면에 대해서 대칭으로 놓여짐
- 이축투영(dimetric) - 투영면이 두 개의 주면에 대칭되도록 놓여짐
- 삼축투영(trimetric) - 일반적인 경우



## Construction of an Axonometric Projection



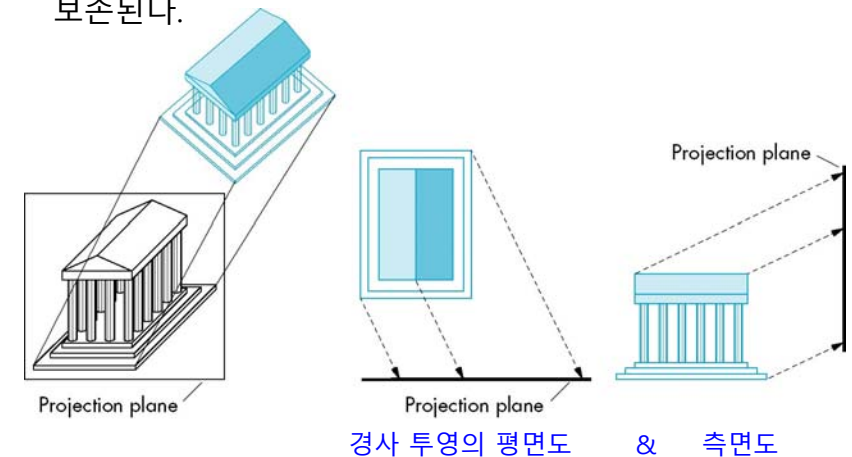
## Types of Axonometric Projections



- 선들의 평행은 이미지 안에서 보존되지만 각은 보존되지 않는다.
- 등축 투영: 이미지공간에서 선분의 길이는 객체 공간에서 측정된 길이보다 짧다. 이러한 거리의 단축 (foreshortening)은 세 개의 주면에서 똑같이 발생한다. 따라서 거리 비교는 가능하다.
- 이축 투영: 두 개의 다른 단축비를 가진다.
- 삼축 투영: 세 개의 다른 단축비를 가진다.

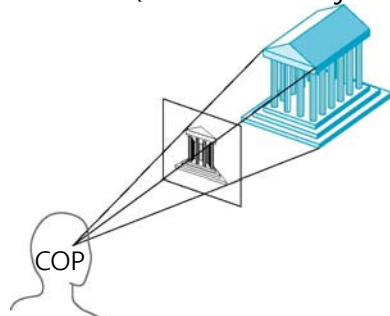
## Oblique Projection

- 경사투영 (Oblique Projection)에서 투영선은 투영면과 임의의 각을 가질 수 있다. 투영면에 평행한 면내의 각은 보존된다.



## Perspective Projection

- 원근(투시) 관측 (Perspective Projection)은 객체가 관측자로부터 멀리 떨어질 수록 크기가 축소된다.
- 투영선은 투영중심 (Center Of Projection)으로 모인다.



- 원근(투시) 관측은 크기가 축소 (diminution)되는 특징을 가진다.
- 이러한 크기변화는 자연스러운 모습의 관측(realistic view)을 얻게 한다.
- 그러나, 선분의 길이가 얼마나 짧아지는 가는 그 선분이 관측자로부터 얼마나 떨어져 있는가에 의존하기 때문에, 길이 측정을 할 수 없다.

## 1-,2-,3-Point Perspective

- 일점, 이점, 삼점 투시 (one, two, three point perspectives) 관측의 차이는 객체의 세가지 주 방향 가운데 얼마나 많은 방향이 투영면에 평행한가에 있다.
- 삼점 투시의 경우 세 개의 주 방향에 평행한 모든 직선들은 세 개의 소실점 (vanishing point)에서 만난다.



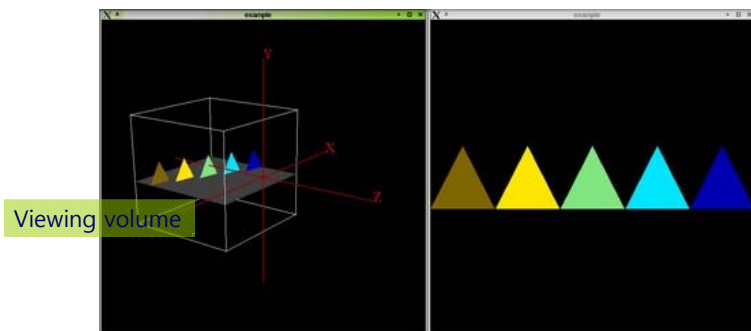
3점 투시

2점 투시

1점 투시

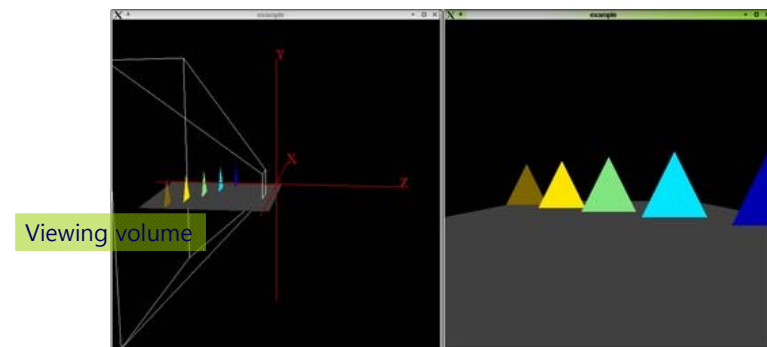
## Orthographic Projection

- 직교 투영 (Orthographic projection)은 직육면체 (rectilinear box)의 관측공간을 화면에 투영한다.
- 객체의 크기가 거리에 따라 변하지 않는다.



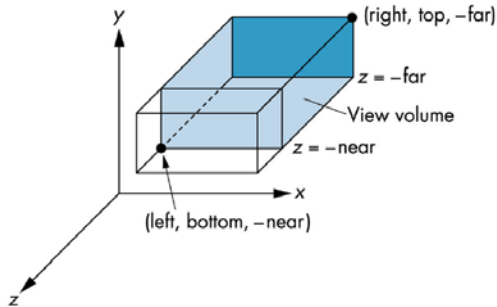
## Perspective Projection

- 원근투영 (Perspective projection)은 절두체 (*frustum*, i.e., *truncated pyramid*) 관측공간을 화면에 투영한다.
- 가까운 객체는 크게 나타나고, 멀리 있는 객체는 작게 나타난다.



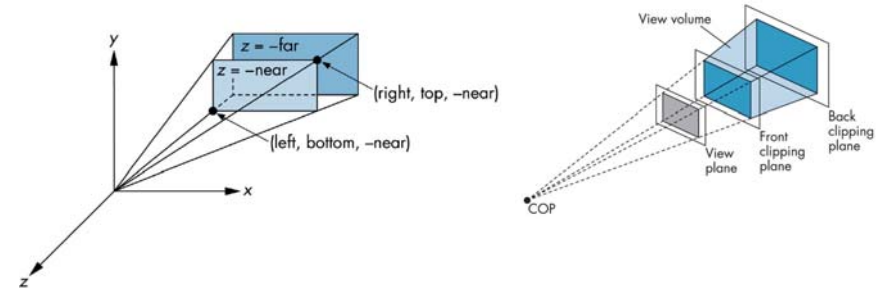
## OpenGL Orthographic Projection

- glm::ortho(left, right, bottom, top, near, far)**
  - 이 함수의 매개변수는 glFrustum의 매개변수와 동일하다.
  - 관측공간은 직육면체이다.
  - near와 far는 양수만 받는다. 내부에서 음수로 바꿔서 사용한다.



## OpenGL Perspective Projection

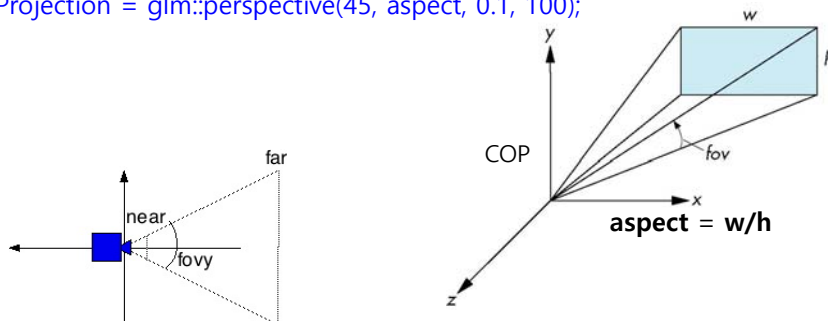
- OpenGL에서 투시투영 (perspective projection)은 카메라가 원점(origin)에 위치하고 있으며 -z축을 바라보고 있다.
- glm::frustum(left, right, bottom, top, near, far)**
  - 앞면과 뒷면의 거리는 양수이어야 하며, COP에서 평면까지의 거리로 측정된다.
  - 관측공간은 절두체 (frustum, i.e. truncated pyramid)이다.



## OpenGL Perspective Projection

- glm::perspective(fovy, aspect, near, far)**
  - fovy - Y-축 방향에서의 시야 (field of view) 각도
  - aspect - 투영면의 (너비를 높이로 나눈) 종횡비 (aspect ratio)
  - near - 앞쪽 클리핑면
  - far - 뒤쪽 클리핑면

Projection = glm::perspective(45, aspect, 0.1, 100);

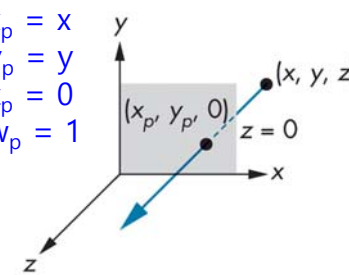


## Orthographic Projection

- 직교 투영 (Orthographic projection)
  - 투영선이 관측 평면에 수직인 평행투영의 특수한 경우이다.
  - 렌즈와 카메라의 뒷면이 평행하고 초점거리가 무한대이다.

Orthographic projection

$$\begin{aligned} x_p &= x \\ y_p &= y \\ z_p &= 0 \\ w_p &= 1 \end{aligned}$$

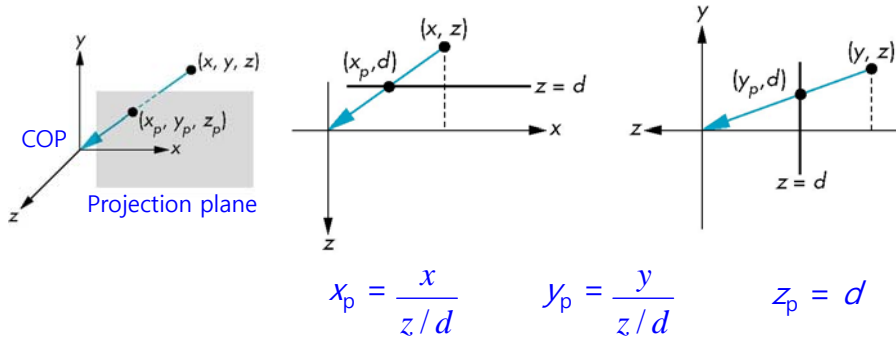


$$\mathbf{M}_{ortho} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{M}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Perspective Projection

- 원근/투시 투영 (Perspective projection)
  - 투영중심 (Center of projection)은 원점 (Origin)
  - 투영면 (Projection plane)  $z_p = d$



## Perspective Projection

Perspective projection

$$x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$y_p = \frac{y}{z/d}$$

$$z_p = d = \frac{z}{z/d}$$

$q = Mp$

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

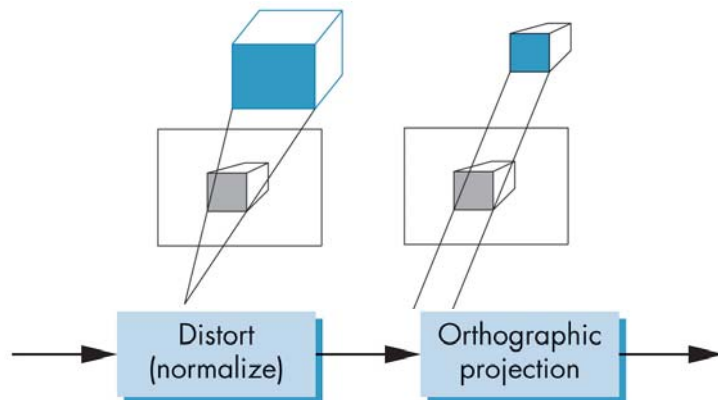
$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M_{pers} \Rightarrow q =$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix}$$

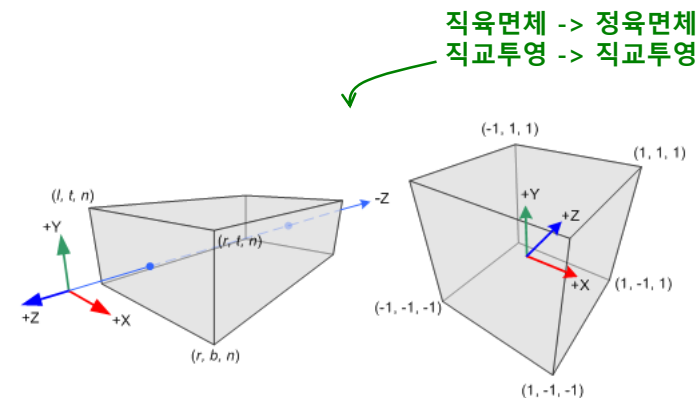
## Projection Normalization

- 투영 정규화 (projection normalization)는 왜곡된 객체의 직교 투영이 원래 객체의 원하는 투영이 되도록, 객체들을 사전 왜곡시킴으로써, 모든 투영을 직교 투영으로 변환시키는 작업이다.



## Orthogonal Projection Matrix

- Orthogonal projection은 관측 공간(View volume)을 정규관측공간 (Canonical view volume)으로 매핑한다.



## Orthogonal Projection Matrix

- 지정된 관측공간의 중심을 정규관측공간의 중심으로 이동

$$T\left(\frac{-(left + right)}{2}, \frac{-(top + bottom)}{2}, \frac{-(-far - near)}{2}\right)$$

- 지정된 관측공간의 변을 길이가 2가 되도록 크기 변환

$$S\left(\frac{2}{(right - left)}, \frac{2}{(bottom - top)}, \frac{2}{(-far - (-near))}\right)$$

Projection matrix:  $\mathbf{P} = \mathbf{ST} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & -\frac{right + left}{right - left} \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & -\frac{top + bottom}{top - bottom} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far - near} & -\frac{far + near}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- General case:  $\mathbf{P} = \mathbf{M}_{ortho} \mathbf{ST}$

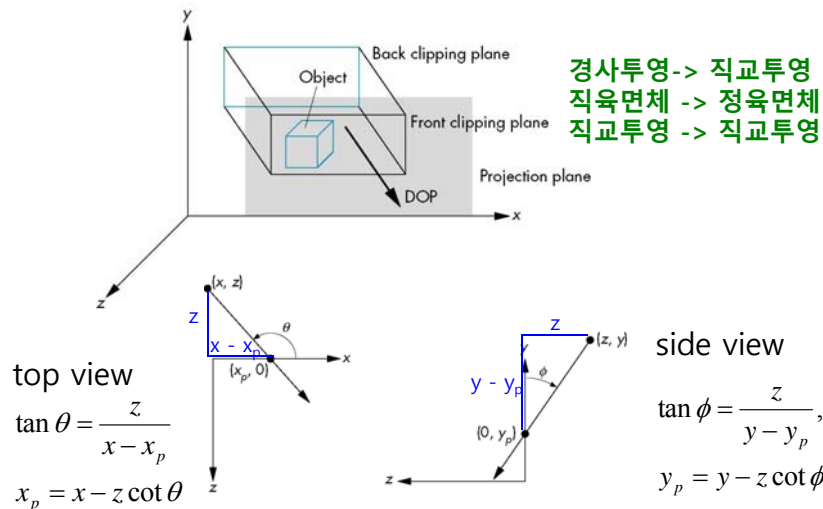
## Orthogonal Projection Matrix

- Ortho = ST

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(right + left)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(top + bottom)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{(-far - near)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & -\frac{right + left}{right - left} \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & -\frac{top + bottom}{top - bottom} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far - near} & -\frac{far + near}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Oblique Projection Matrix



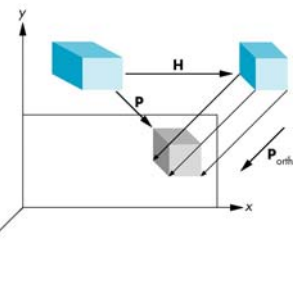
## Oblique Projection Matrix

- xy shear (z values unchanged)

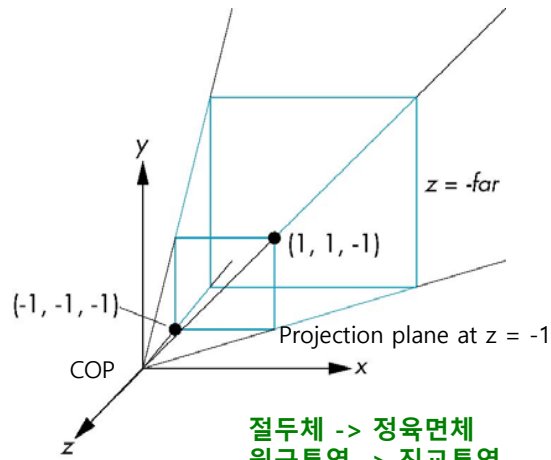
$$\mathbf{H}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cot \theta & 0 \\ 0 & 1 & -\cot \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Projection matrix:  $\mathbf{P} = \mathbf{M}_{ortho} \mathbf{H}(\theta, \phi)$

- General case:  $\mathbf{P} = \mathbf{M}_{ortho} \mathbf{ST} \mathbf{H}(\theta, \phi)$



## Perspective Projection Matrix



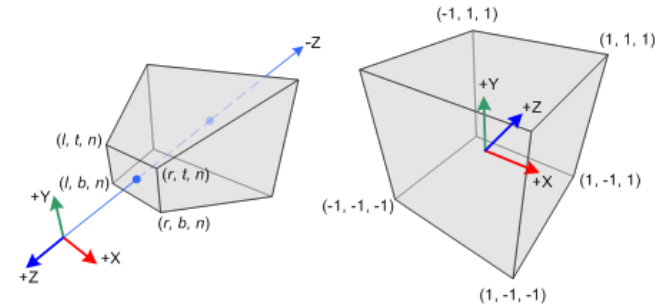
절두체 -> 정육면체  
 원근투영 -> 직교투영  
 한 점으로 모이던 투영선들이 평행해짐 - 원근감생성

## Perspective Projection Matrix

□ Perspective projection은 관측 공간(View volume)을 정규관측공간 (Canonical view volume)으로 매핑한다.

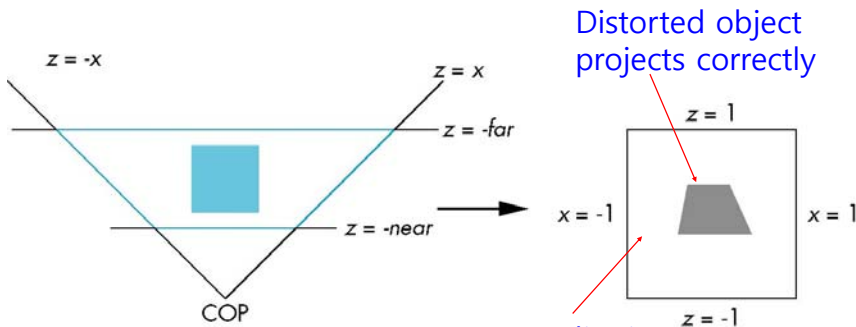
$[l, r] \Rightarrow [-1, 1]$ ,  $[b, t] \Rightarrow [-1, 1]$ ,  $[-n, -f] \Rightarrow [-1, 1]$

$[n, f] \Rightarrow [1, -1]$



## Perspective Projection Matrix

□ 원근 정규화 (Perspective normalization)



$x = \pm z \rightarrow \pm 1$   
 $y = \pm z \rightarrow \pm 1$   
 $z = near/far \rightarrow \pm 1$

New clipping volume

## Perspective Projection Matrix

□ 원근 정규화 (Perspective normalization)는 원근투영을 직교투영으로 바꾸는 작업이다.

■ 투영면(PP)이  $z = -1$ , 투영중심(COP)이 원점인 원근투영 행렬, M

$$M_{pers} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

■ 관측공간의 측면이 투영면을 45도로 교차하도록 함으로써 시야를 90도로 고정

$x = \pm z$

$y = \pm z$



## Perspective Projection Matrix

□ N 행렬:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

□  $p' = Np$ :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \alpha z + \beta, \quad w' = -z$$

□ 원근 나눗셈 (Perspective division)한 후,  $p' \rightarrow p''$ :

$$\Rightarrow x'' = -\frac{x}{z}, \quad y'' = -\frac{y}{z}, \quad z'' = \frac{\alpha z + \beta}{-z}$$

## Perspective Projection Matrix

□  $x = \pm z$  이면,  $x'' = \pm 1$   
 □  $y = \pm z$  이면,  $y'' = \pm 1$   
 □ Far plane  $z = -far$  이면,  $z'' = \frac{\alpha(-far) + \beta}{far} = 1$

Near plane  $z = -near$  이면,  $z'' = \frac{\alpha(-near) + \beta}{near} = -1$

□  $z'' \rightarrow \pm 1$  매핑하도록  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 선정:  $(-near, -1)$  &  $(-far, 1)$

$$\alpha = -\frac{far + near}{far - near}$$

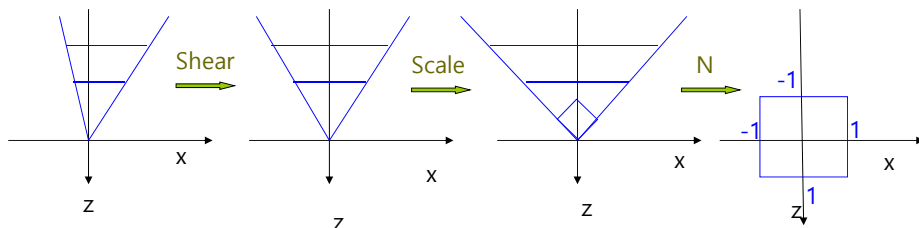
$$\beta = -\frac{2far \ near}{far - near}$$

$$\begin{aligned} \alpha(-far) + \beta &= far & \alpha(-near) + \beta &= -near \\ \beta &= -near + \alpha far \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(-far) + (-near + \alpha far) &= far \\ \alpha(near - far) &= near + far \\ \alpha &= \frac{near + far}{near - far} = -\frac{far + near}{far - near} \end{aligned}$$

## OpenGL Perspective Projection

□ `glm::frustum(left, right, bottom, top, near, far)`



## OpenGL Perspective Projection

□ Shear  $H(\cot \theta, \cot \phi) = H\left(\frac{right + left}{-2near}, \frac{top + bottom}{-2near}\right)$

□ Then,  $x = \pm \frac{right - left}{-2near}, y = \pm \frac{top - bottom}{-2near}, z = -near, z = -far$

□ Scale  $S = S\left(\frac{-2near}{right - left}, \frac{-2near}{top - bottom}, 1\right)$

□ Then,  $x = \pm z, y = \pm z$

□ Normalize

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = -\frac{far + near}{far - near}$$

$$\beta = -\frac{2far \ near}{far - near}$$

## OpenGL Perspective Projection Matrix

### Frustum = NSH

Frustum = NSH

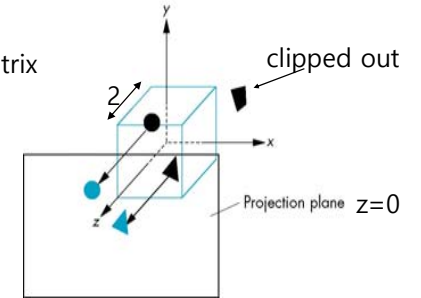
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far + near}{far - near} & -\frac{2far \ near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2near}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2near}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(right + left)}{2} & 0 \\ \frac{(top + bottom)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2near}{right - left} & 0 & \frac{right + left}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top - bottom} & \frac{top + bottom}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far + near}{far - near} & -\frac{2far \ near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Computer Viewing

### 컴퓨터에서의 관측은 다음과 같이 구성된다.

- 카메라의 위치와 방향을 잡아준다.
  - Model-view transformation matrix
- 투영변환을 적용한다.
  - Projection transformation matrix
- 클리핑 (Clipping) 한다.
  - View volume



### OpenGL에서 초기 카메라는

- 객체 프레임의 원점에 놓이고,
- z-축의 음수방향을 향한다.
- 직교관측으로 설정되어 있고,
- 원점을 중심으로 한 각 변의 길이가 2인 정육면체로 된 관측 공간을 가진다.
- 기본 투영면은 z=0인 면이고, 투영방향은 z축과 나란하다.

## Positioning the Camera Frame

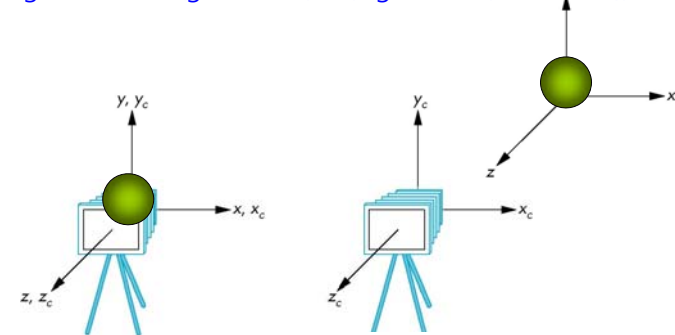
- 모델-관측 변환행렬 (model-view transformation matrix) 방법
- 관측 참조점(VRP), 관측면 법선(VPN), 관측 상향벡터(VUP)를 이용한 관측-방향 행렬 (view-orientation matrix) 방법
- Look-at 함수

## Positioning the Camera Frame

### OpenGL에서 카메라 위치 지정 방법

- 카메라를 원점으로부터 뒤로 이동시키는 방법
- 또는 물체를 카메라의 앞으로 이동시키는 방법을 사용한다.

World = glm::translate(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(0.0, 0.0, -d));



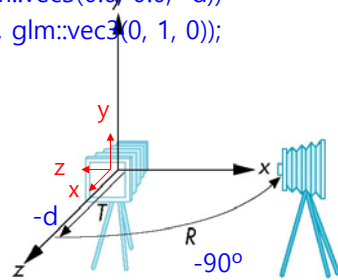
World frame = Camera frame

Moving the camera frame after translation by  $-d$ ,  $d > 0$

## Positioning the Camera

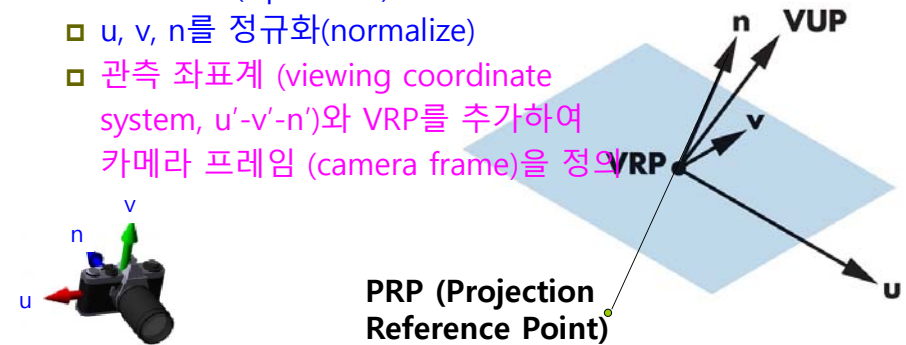
- 연속된 회전 (rotation)과 이동 (translation)으로 카메라 위치를 지정할 수 있다.
- 예제: x축 방면에서 바라보는 관측
  - R = 카메라를 y축을 중심으로 회전
  - T = 카메라를 원점에서 먼 곳으로 이동
  - Model-view matrix C = TR

```
World = glm::translate(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(0.0, 0.0, -d))
        * glm::rotate(glm::mat4(1.0f), -90, glm::vec3(0, 1, 0));
```



## Camera Frame

- 관측 참조점 (View reference point, **VRP**)
- 관측면 법선 (View plane normal, **VPN**)  $n = PRP - VRP$
- 관측 상향벡터 (View-up vector, **VUP**)
- 측면벡터 (Side vector)  $u = VUP \times n$
- 상향벡터 (Up vector)  $v = n \times u$
- $u, v, n$ 를 정규화(normalize)
- 관측 좌표계 (viewing coordinate system,  $u'-v'-n'$ )와 VRP를 추가하여 카메라 프레임 (camera frame)을 정의



## Camera Frame

- View-orientation matrix, M

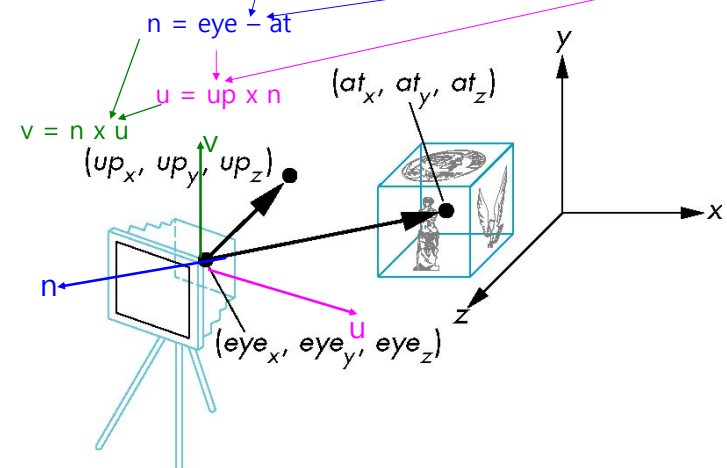
$$M = \begin{bmatrix} u'_x & v'_x & n'_x & 0 \\ u'_y & v'_y & n'_y & 0 \\ u'_z & v'_z & n'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation matrix,  $M^{-1} = M^T = R$
- World frame에서 카메라의 위치 지정:  $V = RT$

$$\begin{bmatrix} u'_x & u'_y & u'_z & 0 \\ v'_x & v'_y & v'_z & 0 \\ n'_x & n'_y & n'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y & u'_z & -e \cdot u' \\ v'_x & v'_y & v'_z & -e \cdot v' \\ n'_x & n'_y & n'_z & -e \cdot n' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

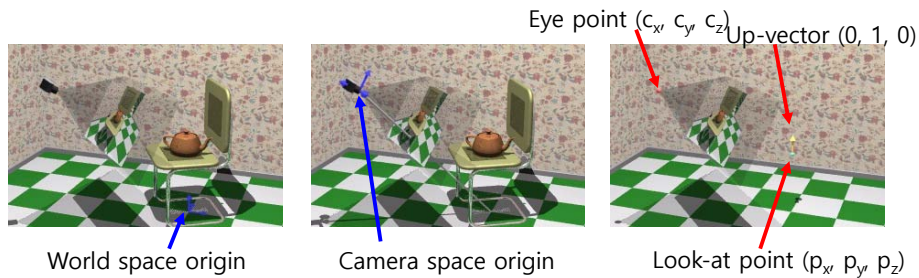
## lookAt

- `glm::lookAt(vec3 & eye, vec3 & at, vec3 & up)`



## lookAt

- *Eye Point*: 카메라의 원점 (월드 좌표계)
- *Look-At*: 카메라가 쳐다보고 있는 위치 (카메라 이미지의 중심이 되는 위치)
- *Up-Vector*: 월드 좌표계에서 카메라가 보는 up 벡터 (카메라 이미지에서 어디로 향하는지에 대한 방향벡터)



## gluLookAt

```
void gluLookAt(GLdouble ex, GLdouble ey, GLdouble ez, GLdouble ax, GLdouble ay, GLdouble az,
GLdouble ux, GLdouble uy, GLdouble uz) {
    GLdouble M[16]; GLdouble u[3], v[3], n[3]; GLdouble mag;

    n[0] = ex - ax; n[1] = ey - ay; n[2] = ez - az;          // n (camera frame X)
    mag = sqrt(n[0]*n[0] + n[1]*n[1] + n[2]*n[2]);
    if (mag) { n[0] /= mag; n[1] /= mag; n[2] /= mag; }

    v[0] = ux; v[1] = uy; v[2] = uz;                       // u (camera frame X)
    u[0] = v[1]*n[2] - v[2]*n[1]; u[1] = -v[0]*n[2] + v[2]*n[0]; u[2] = v[0]*n[1] - v[1]*n[0];
    mag = sqrt(u[0]*u[0] + u[1]*u[1] + u[2]*u[2]);
    if (mag) { u[0] /= mag; u[1] /= mag; u[2] /= mag; }

    v[0] = n[1]*u[2] - n[2]*u[1]; v[1] = -n[0]*u[2] + n[2]*u[0]; v[2] = n[0]*u[1] - n[1]*u[0]; // v (camera frame Y)
    mag = sqrt(v[0]*v[0] + v[1]*v[1] + v[2]*v[2]);
    if (mag) { v[0] /= mag; v[1] /= mag; v[2] /= mag; }

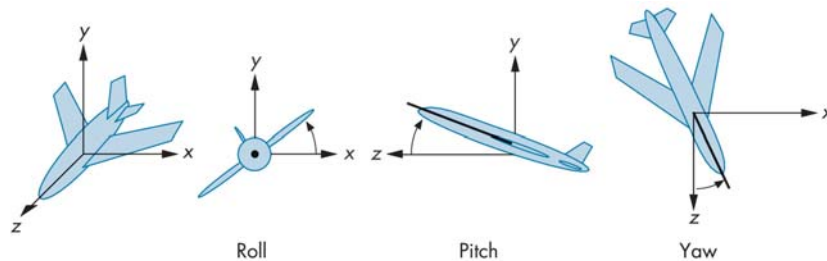
    M[0] = u[0]; M[4] = u[1]; M[8] = u[2]; M[12] = 0.0;      // R
    M[1] = v[0]; M[5] = v[1]; M[9] = v[2]; M[13] = 0.0;
    M[2] = n[0]; M[6] = n[1]; M[10] = n[2]; M[14] = 0.0;
    M[3] = 0.0; M[7] = 0.0; M[11] = 0.0; M[15] = 1.0;
    glMultMatrix(M);

    glTranslated(-ex, -ey, -ez);                            // RT
}

```

## Yaw, Pitch, Roll

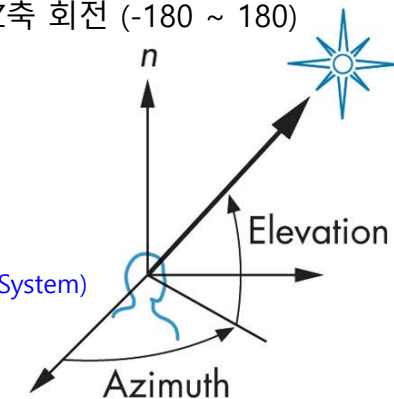
- 편요 (Yaw) – Y축 회전
- 종전 (Pitch) – X축 회전
- 횡전 (Roll) – Z축 회전



## Elevation and Azimuth

- 방위각 (Azimuth) – X축 회전 (-180 ~ 180)
- 양각 (Elevation) – Y축 회전 (-90 ~ 90)
- 꼬임각 (Twist angle) – Z축 회전 (-180 ~ 180)

3차원 극좌표계  
(Spherical Polar Coordinates System)



## Reference

---

- 원근 정규화

[http://www.songho.ca/opengl/gl\\_projectionmatrix.html](http://www.songho.ca/opengl/gl_projectionmatrix.html)