

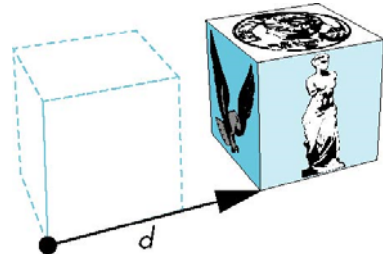
Geometric Objects and Transformation

514780
2019년 가을학기
9/30/2019
단국대학교 박경신

3D Transformations

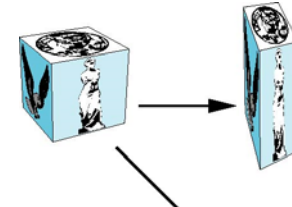
- 일반적으로 3차원 변환은 2차원 변환의 확장으로 생각하면 된다.
- 변환 행렬은 각각 한 행과 열이 추가된다.
- 3차원의 이동 (Translation), 크기변환 (Scaling), 밀림변환 (Shearing)의 기본 원리는 2차원과 같다.
- 그러나, 3차원의 회전은 좀 더 복잡하다.

3D Translation

$$p' = p + d \quad p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ 0 \end{bmatrix}$$


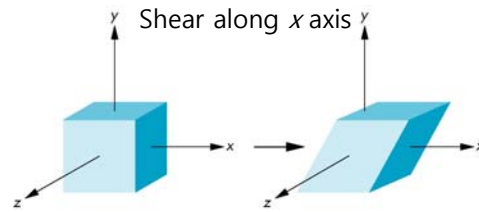
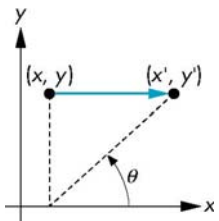
$$p' = Tp \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Scale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$


$$p' = Sp \quad S = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{sx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Shear



$$\begin{aligned} x' &= x + y \cot \theta \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x' - x} \Rightarrow \cot \theta = \frac{x' - x}{y}$$

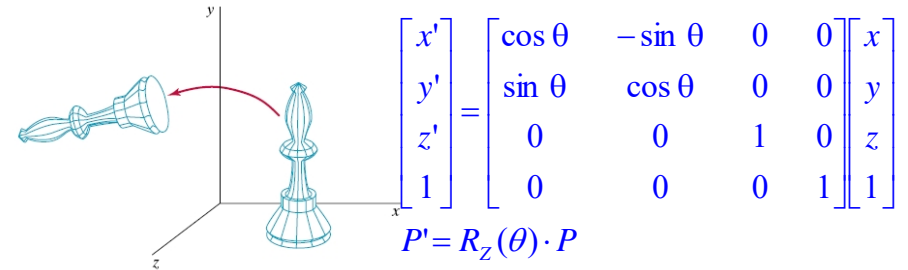
3D Rotation

□ Z-축으로 회전

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

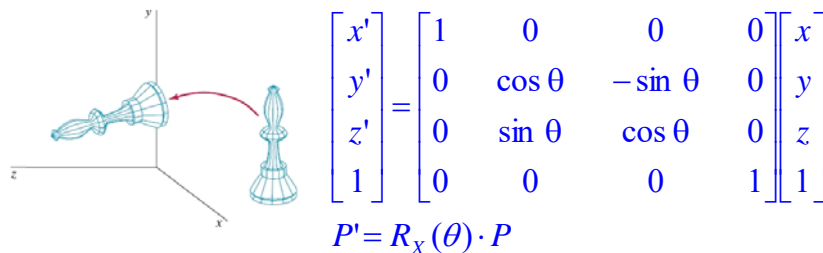
$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$$



3D Rotation

□ X-축으로 회전

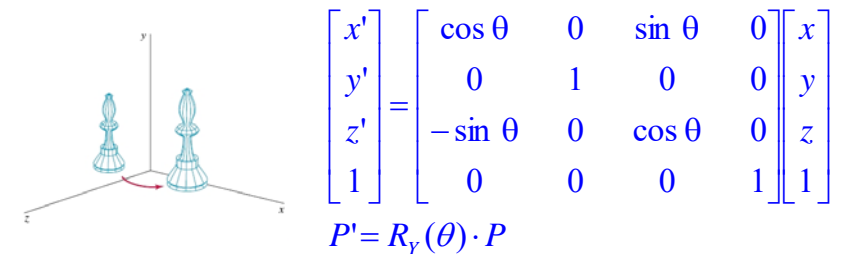
$$\begin{aligned} y' &= y \cos \theta - z \sin \theta \\ z' &= y \sin \theta + z \cos \theta \\ x' &= x \end{aligned}$$



3D Rotation

□ Y-축으로 회전

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + z \sin \theta \\ z' &= -x \sin \theta + z \cos \theta \\ y' &= y \end{aligned}$$

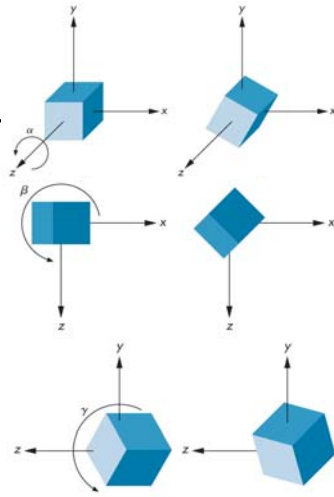
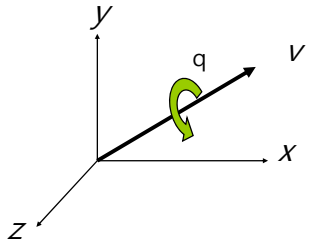


3D Rotation about the Origin

- 원점(0, 0, 0)에서 임의의 회전은 세 축에 대한 세 번의 연속적인 회전에 구성할 수 있다.

$$R(\theta) = R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x)$$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 를 **오일러 앵글**이라 부른다.

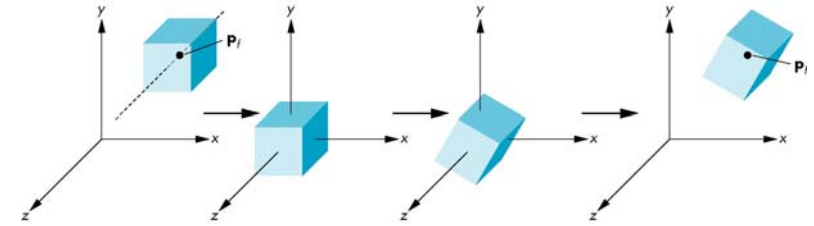


Rotation About a Pivot other than the Origin

- 고정점 Pivot (P_f)을 원점(0, 0, 0)으로 이동 후, 회전 후, 다시 Pivot으로 이동한다.

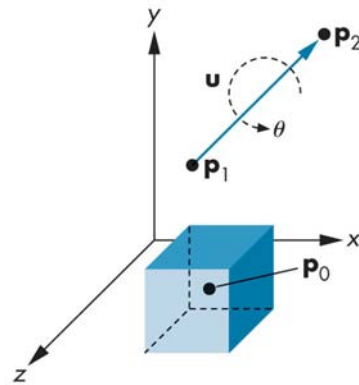
$$M = T(p_f) R_z(\theta) T(-p_f)$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & x_f - x_f \cos \theta + y_f \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & y_f - x_f \sin \theta - y_f \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3D Rotation about an Arbitrary Axis

- P_0 를 원점으로 이동한다.
- 임의의 축 u 를 z-축에 정렬 (align) 시키기 위해 두 번 회전을 수행한다.
- Z-축으로 θ 만큼 회전한다.
- 두 번의 회전을 되돌린다 (undo alignment).
- 다시 P_0 로 이동한다.



$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x)T(-P_0)$$

3D Rotation about an Arbitrary Axis

- The translation matrix, $T(-P_0)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

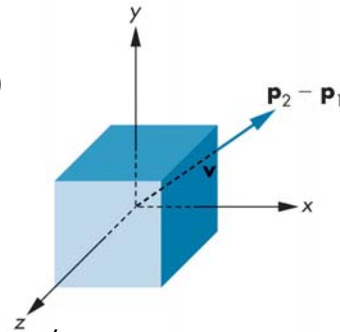
3D Rotation about an Arbitrary Axis

- The rotation-axis vector

$$u = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

- Normalize u:

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$



- Rotate along x-axis until v hits xz -plane
- Rotate along y-axis until v hits z -axis

3D Rotation about an Arbitrary Axis

- Find θ_x and θ_y

$$v = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \\ \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$$

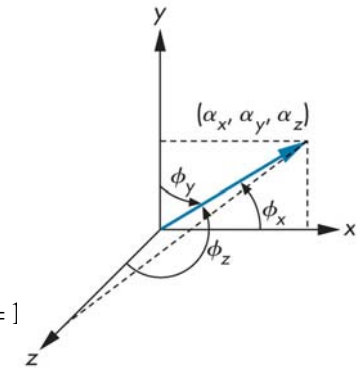
- Direction cosines:

$$\cos \phi_x = \alpha_x$$

$$\cos \phi_y = \alpha_y$$

$$\cos \phi_z = \alpha_z$$

$$\cos^2 \phi_x + \cos^2 \phi_y + \cos^2 \phi_z = 1$$

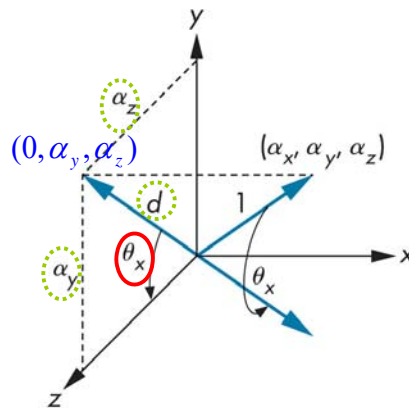


3D Rotation about an Arbitrary Axis

- Compute x-rotation θ_x

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_z}{d} & -\frac{\alpha_y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_y}{d} & \frac{\alpha_z}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{\alpha_y^2 + \alpha_z^2}$$



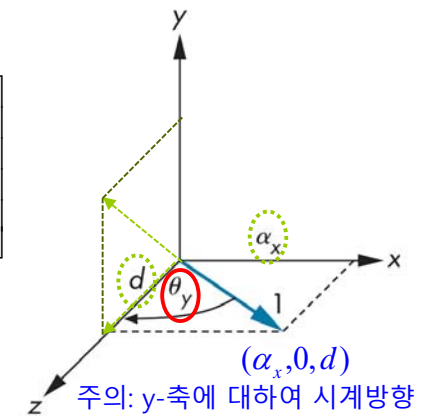
$$\cos \theta_x = \frac{\alpha_x}{d} \\ \sin \theta_x = \frac{\alpha_y}{d}$$

3D Rotation about an Arbitrary Axis

- Compute y-rotation θ_y

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} d & 0 & -\alpha_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_z^2}$$



$$\cos \theta_y = d \\ \sin \theta_y = \alpha_x$$

주의: y-축에 대하여 시계방향

3D Rotation about an Arbitrary Axis

- Rotation about the z axis

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

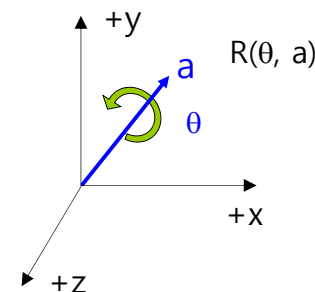
- Undo alignment, $R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)$

- Undo translation, $T(P_0)$

- $M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x)T(-P_0)$

3D Rotation about an Arbitrary Axis Using Rotation Vectors

- 임의의 회전축 (axis)에 대한 하나의 회전각도 (angle) 4개의 숫자로 표현한다.
- 임의의 회전축을 나타내는 단위벡터 $a(x, y, z)$ 와 단위 벡터 주위로 회전각도를 나타내는 θ (0~360)값으로 구성된다.
- 궁극적으로 axis/angle을 하나의 3D rotation vector로 바꿀 수 있다.



3D Rotation about an Arbitrary Axis

- 회전축(axis)/각(angle)로부터 다음과 같은 회전행렬 (rotation matrix)을 만든다.

$$R = I \cos \theta + \text{Symmetric} (1 - \cos \theta) + \text{Skew} \sin \theta$$

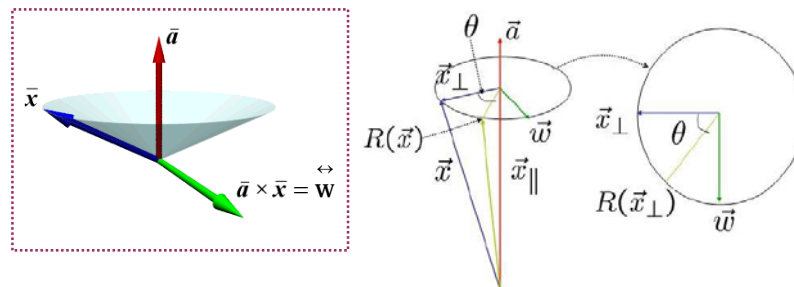
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta + \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \sin \theta$$

$$= \begin{bmatrix} a_x^2 + \cos \theta (1 - a_x^2) & a_x a_y (1 - \cos \theta) - a_z \sin \theta & a_x a_z (1 - \cos \theta) + a_y \sin \theta \\ a_x a_y (1 - \cos \theta) + a_z \sin \theta & a_y^2 + \cos \theta (1 - a_y^2) & a_y a_z (1 - \cos \theta) - a_x \sin \theta \\ a_x a_z (1 - \cos \theta) - a_y \sin \theta & a_y a_z (1 - \cos \theta) + a_x \sin \theta & a_z^2 + \cos \theta (1 - a_z^2) \end{bmatrix}$$

3D Rotation as Vector Components

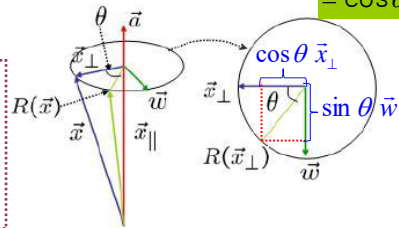
- 임의의 회전축 $a = [a_x, a_y, a_z]$ 를 중심으로 θ 만큼 회전 변환

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \left(\text{Symmetric} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right) (1 - \cos \theta) + \text{Skew} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \sin \theta + \text{Icos} \theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



3D Rotation as Vector Components

$$(R(\vec{x}_\perp) \cdot \vec{x}_\perp) \vec{x}_\perp = \cos \theta \vec{x}_\perp$$



$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{a} \times \vec{x}_\perp \\ &= \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{x}_\parallel) \\ &= (\vec{a} \times \vec{x}) - (\vec{a} \times \vec{x}_\parallel) \\ &= \vec{a} \times \vec{x} \end{aligned}$$

$$R(\vec{x}_\perp) = \cos \theta \vec{x}_\perp + \sin \theta \vec{w}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_\parallel &= (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} \\ \vec{x}_\perp &= \vec{x} - \vec{x}_\parallel = \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\vec{x}) &= R(\vec{x}_\parallel) + R(\vec{x}_\perp) \\ &= R(\vec{x}_\parallel) + \cos \theta \vec{x}_\perp + \sin \theta \vec{w} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} + \cos \theta (\vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a}) + \sin \theta \vec{w} \\ &= \cos \theta \vec{x} + (1 - \cos \theta) \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a}}_{\text{Symmetric}} + \sin \theta \underbrace{(\vec{a} \times \vec{x})}_{\text{Skew}} \end{aligned}$$

3D Rotation as Vector Components

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \left(\text{Symmetric} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right) (1 - \cos \theta) + \text{Skew} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \sin \theta + \mathbf{I} \cos \theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- The vector a specifies the axis of rotation. This axis vector must be normalized.
- The rotation angle is given by θ .
- The basic idea is that *any rotation can be decomposed into weighted contributions from three different vectors*.

3D Rotation as Vector Components

- The symmetric matrix of a vector generates a vector in the direction of the axis.
- The symmetric matrix is composed of the outer product of a row vector and a column vector of the same value.

$$\text{Symmetric} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Symmetric} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{x})$$

3D Rotation as Vector Components

- Skew symmetric matrix of a vector generates a vector that is perpendicular to both the axis and its input vector.

$$\text{Skew} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Skew}(\vec{a}) \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$$

3D Rotation as Vector Components

- First, consider a rotation by 0. :

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{bmatrix} (1-1) + \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- For instance, a rotation about the x-axis:

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta$$

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3D Rotation as Vector Components

- For instance, a rotation about the y-axis:

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta$$

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- For instance, a rotation about the z-axis:

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta$$

$$\text{Rotate} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quaternion

- 사원수(Quaternion)란 3차원 그래픽스에서 회전을 표현할 때, 행렬 대신에 사용하는 수학적 개념으로 사원수는 4차원 복소수 공간 (complex space) 벡터이다.
- 실제로 회전의 표현에 있어서 가장 효과적인 방법이다.
- 사원수 (quaternion)는 4개의 구성요소로 표현한다.

$$\mathbf{q} = \langle x \quad y \quad z \quad w \rangle$$

Quaternion (Imaginary Space)

- 사원수는 실제로 복소수(complex numbers)의 확장이다.
- 4개 중에 하나는 실수 (scalar number)이고 다른 세 개는 허수의 공간 i, j, k에 있는 복소수이다.

$$\mathbf{q} = xi + yj + zk + w$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$i = jk = -kj$$

$$j = ki = -ik$$

$$k = ij = -ji$$

Quaternion (Scalar/Vector)

- 사원수는 또한 스칼라 값 s 와 벡터 값 v 로 표현된다.

$$\mathbf{q} = \langle \mathbf{v}, s \rangle$$

$$v = (x, y, z)$$

$$s = w$$

Identity Quaternion

- 벡터와는 달리 2개의 항등 사원수 (Identity quaternion)가 있다.
- 곱셈 항등 사원수 (multiplication identity quaternion) - 그래서 이 곱셈 항등 사원수와 곱해진 어떤 사원수도 변하지 않는다:

$$\mathbf{q} = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle = 0i + 0j + 0k + 1$$

- 덧셈 단위 사원수 (addition identity quaternion) - 여기서는 사용하지 않는다:

$$\mathbf{q} = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle$$

Unit Quaternion

- 사원수 연산의 편리함을 위하여 단위 사원수 (unit length quaternion)을 사용한다.
- 단위 사원수 (unit length quaternion)는 사원수의 크기가 1이다. 이것은 4차원 공간에서 단위 길이를 가지는 구 (hypersphere)의 surface (즉, 4차원 공간에서의 3차원 부피)를 형성하는 벡터를 이룬다.

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = 1$$

- 사원수의 정규화 (normalization)은 아래와 같이 구한다.

$$q = \frac{q}{|\mathbf{q}|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}}$$

Quaternion as Rotations

- 사원수는 벡터의 회전과 밀접한 관계가 있는데 회전축 (axis \mathbf{a})와 각도 (angle θ)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{q} = \left[a_x \sin \frac{\theta}{2}, a_y \sin \frac{\theta}{2}, a_z \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

or

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

- 회전축 \mathbf{a} 가 단위길이를 갖는다면, 사원수 \mathbf{q} 도 마찬가지로 단위길이를 갖는다.

Quaternion as Rotations

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{q}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \\
 &= \sqrt{a_x^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_z^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} |\mathbf{a}|^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

Quaternion to Rotation Matrix

- 최종적으로 얻어진 사원수를 실제 프로그램에서 회전에 사용하기 위해서는 다음과 같은 행렬로 변환:

$$\begin{bmatrix}
 x^2 - y^2 - z^2 + w^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\
 2xy + 2wz & -x^2 + y^2 - z^2 + w^2 & 2yz - 2wx \\
 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & -x^2 - y^2 + z^2 + w^2
 \end{bmatrix}$$

- 단위 사원수가 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ 를 갖는 점을 이용하여, 회전형렬을 좀더 줄이면:

$$\begin{bmatrix}
 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\
 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\
 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2
 \end{bmatrix}$$

Quaternion to Axis/Angle

- 사원수를 3차원 공간에서의 임의 회전축 \mathbf{a} (a_x, a_y, a_z)과 각도(θ)에 의한 표현으로 변환:

$$\text{scale} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{or} \quad \sin(\text{acos}(w))$$

$$ax = x / \text{scale}$$

$$ay = y / \text{scale}$$

$$az = z / \text{scale}$$

$$\theta = 2\text{acos}(w)$$

Quaternion Dot Product

- 두 개의 사원수 간의 내적 (dot product)은 두 개의 벡터 간의 내적과 같은 방식으로 계산하면 된다.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q + w_p w_q = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \varphi$$

Quaternion Multiplication

- 단위 사원수는 3차원 공간에서의 한 방향을 표현하기 때문에, 두 개의 단위 사원수 간의 곱은 두 개의 단위 회전을 결합한 회전을 나타내는 단위 사원수가 된다.
- 사원수의 곱은 순서가 중요하다. 사원수의 곱은 교환법칙이 성립되지 않는다. $qq' \neq q'q$

$$qq' = (xi + yj + zk + w)(x'i + y'j + z'k + w')$$

$$= \langle s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v} + \mathbf{v}' \times \mathbf{v}, ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \rangle$$

Quaternion Operations

- Negation of quaternion, $-q$
 - $-[v\ s] = [-v\ -s] = [-x, -y, -z, -w]$
- Addition of two quaternion, $p + q$
 - $p + q = [pv, ps] + [qv, qs] = [pv + qv, ps + qs]$
- Magnitude of quaternion, $|q|$
 - $|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$
- Conjugate of quaternion, q^* (켈레 사원수)
 - $q^* = [v\ s]^* = [-v\ s] = [-x, -y, -z, w]$
- Multiplicative inverse of quaternion, q^{-1} (역수) $q\ q^{-1} = q^{-1}\ q = 1$
 - $q^{-1} = q^*/|q|$
- Exponential of quaternion
 - $\exp(v\ q) = v\ \sin\ q + \cos\ q$
- Logarithm of quaternion $q = [v\ \sin\ q, \cos\ q]$
 - $\log(q) = \log(v\ \sin\ q + \cos\ q) = \log(\exp(v\ q)) = v\ q$

Quaternion Interpolation

- 사원수는 키 프레임 (key frames)간에 회전 보간 (interpolation)을 가장 효과적으로 표현할 수 있다.
 - alpha = fraction value in between frame0 and frame1
 - $q_1 = \text{Euler2Quaternion}(\text{frame0})$
 - $q_2 = \text{Euler2Quaternion}(\text{frame1})$
 - $qr = \text{QuaternionInterpolation}(q_1, q_2, \text{alpha})$
 - $qr.\text{Quaternion2Euler}()$
- 사원수 보간 (Quaternion Interpolation)
 - Linear Interpolation (LERP)
 - Spherical Linear Interpolation (SLERP)
 - Spherical Cubic Interpolation (SQUAD)

Linear Interpolation (LERP)

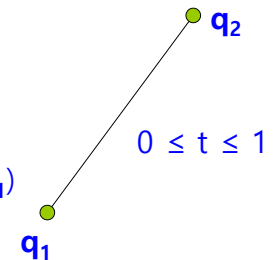
- 가장 쉬운 방식으로 두 개의 사원수간의 선형보간 (linear interpolation) 방식이 있다.

$$\text{Lerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = (1-t)\mathbf{q}_1 + (t)\mathbf{q}_2$$

where $0 \leq t \leq 1$

- 선형보간 공식의 또 다른 표현:

$$\text{Lerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = \mathbf{q}_1 + t(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$$



Spherical Linear Interpolation (SLERP)

- 구면 선형 보간 (spherical linear interpolation)은 벡터 q_1 가 길이를 유지한 채로 회전해서 q_2 가 되었다고 했을 때 회전한 그 사이 값을 보간하는 방법이다.

$$q(t) = \frac{\sin \theta(1-t)}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} q_2$$

where $\theta = \arccos(q_1 \cdot q_2)$

Spherical Cubic Interpolation (SQUAD)

- 두 단위 사원수 q_i, q_{i+1} 사이에 a_i, a_{i+1} 이라는 사원수를 도입한다. 구면 입방 보간 (spherical cubic interpolation)은 아래와 같이 정의한다.

$$Squad(q_i, q_{i+1}, a_i, a_{i+1}, t)$$

$$= slerp(slerp(q_i, q_{i+1}, t), slerp(a_i, a_{i+1}, t), 2t(1-t))$$

$$a_i = q_i * \exp\left(\frac{-\log(q_i^{-1} * q_{i-1}) + \log(q_i^{-1} * q_{i+1})}{4}\right)$$

$$a_{i+1} = q_{i+1} * \exp\left(\frac{-\log(q_{i+1}^{-1} * q_i) + \log(q_{i+1}^{-1} * q_{i+2})}{4}\right)$$

- a_i 들은 초기 방향들에서의 접선 방향 (tangent orientation)을 표시하는데 사용된다.