Geometric Objects - Spaces and Matrix

321190
2014년 봄학기
4/3/2014
박경신

Spaces

- 벡터 공간 (Vector space)
  - 실수와 같은 스칼라 (scalars)와 벡터 (vectors)를 가지고 있다.
  - Scalars: α, β, δ
  - Vectors: u, v, w
- 어파인 공간 (Affine space)
  - 벡터공간에 점(points)이 추가된다.
  - Points: P, Q, R
- 유클리드 공간 (Euclidean space)
  - 거리 개념 (Concept of distance)이 추가된다.

Scalars, Points, Vectors

- 3 basic types needed to describe the geometric objects and their relations
- Scalars: α, β, δ
- Points: P, Q, R
- Vectors: u, v, w
- Vector space
  - scalars & vectors
- Affine space
  - Extension of the vector space that includes a point

Scalars

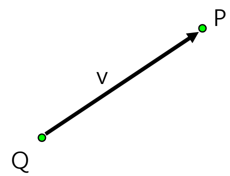
- 덧셈, 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 성립
  - $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
  - $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
  - $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
  - $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$
- 덧셈 항등원(identity) 0과 곱셈 항등원 1
  - $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
  - $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- 덧셈의 역(inverse)과 곱셈의 역
  - $\alpha + (-\alpha) = 0$
  - $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$

Vectors

- 벡터는 크기(magnitude 혹은 length)와 방향 (direction)을 가지고 있다.
- 속도(velocity)나 힘(force)과 같은 물리량은 벡터이다.
- 컴퓨터그래픽스에서 쓰이는 방향성 선분 (directed line segments)은 벡터이다.
- 벡터는 공간 내에 고정된 위치(position)를 갖지 않는다.

Points

- 점(points)은 공간에서의 위치(position)을 갖는다.
- 점과 벡터와의 연산
  - 점-점 뺄셈 (point-point subtraction)은 벡터를 만든다.
  - 점-벡터 덧셈 (point-vector addition)은 점을 만든다.

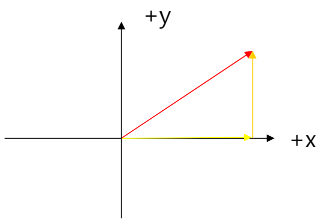


$v = P - Q$

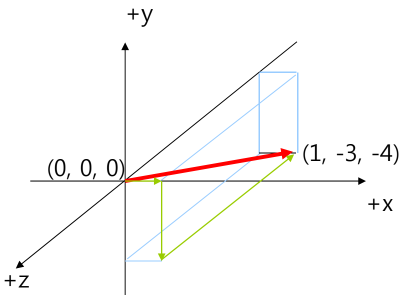
$P = Q + v$

Specifying Vectors

- 2D Vector: (x, y)
- 3D Vector: (x, y, z)

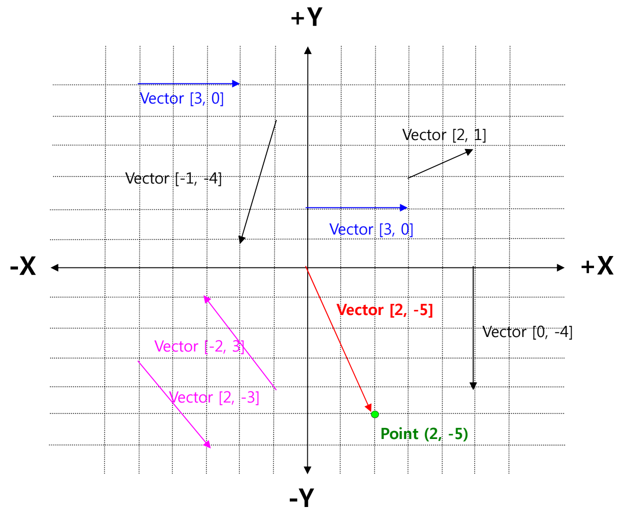


2D Vector



3D Vector
원점 O(0, 0, 0)에서 점 P(1, -3, -4)로 향하는 벡터

Examples of 2D vectors

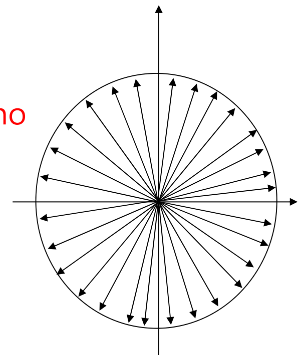


Vector Operations

- zero vector
- vector negation
- vector/scalar multiply
- add & subtract two vectors
- vector magnitude (length)
- normalized vector
- distance formula
- vector product
  - dot product
  - cross product

The Zero Vector

- 3차원 영벡터 (zero vector)는 (0, 0, 0)이다.
- 영벡터는 0 크기 (zero magnitude)를 가지고 있다.
- 영벡터는 방향을 가지고 있지 않다 (no direction).



Negating a Vector

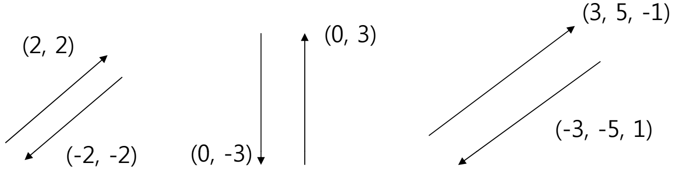
- 모든 벡터 **v**는 음수벡터 **–v**를 가지고 있다: **v + (-v) = 0**
- 음수벡터

  $-(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_n)$
- 2D, 3D, 4D 벡터의 음수(negation)

  $-(x, y) = (-x, -y)$

  $-(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

  $-(x, y, z, w) = (-x, -y, -z, -w)$



Vector-Scalar Multiplication

- 벡터 스칼라 곱

  $\alpha * (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- 벡터 스칼라 나누기

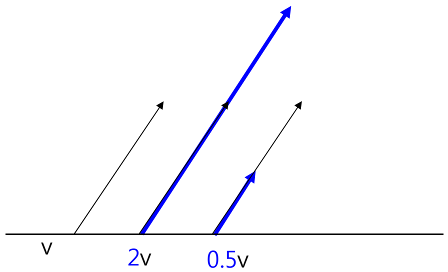
  $1/\alpha * (x, y, z) = (x/\alpha, y/\alpha, z/\alpha)$
- 예제:

  2 * (4, 5, 6) = (8, 10, 12)

  ½ * (4, 5, 6) = (2, 2.5, 3)

  -3 * (-5, 0, 0.4) = (15, 0, -1.2)

  3**u** + **v** = (3**u**) + **v**



Vector Addition and Subtraction

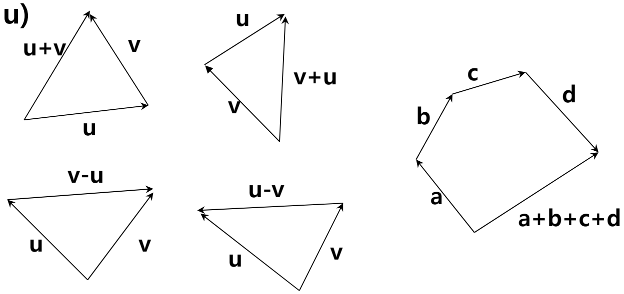
- 벡터 더하기 (Addition)
  - 수미연결규칙 (head-to-tail axiom)으로 정의

  $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- 벡터 빼기 (Subtraction)

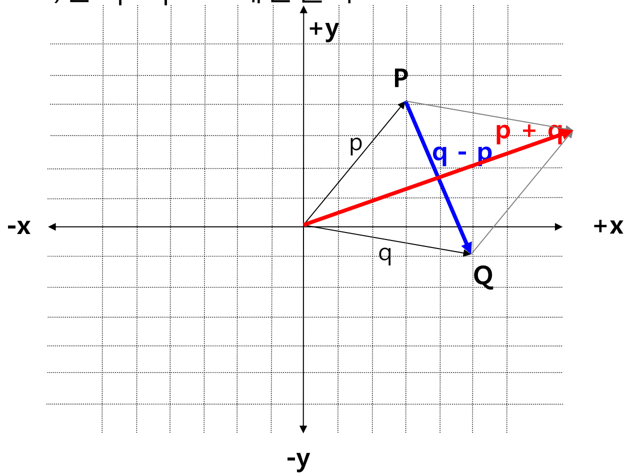
  $(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$

  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -(\mathbf{v} - \mathbf{u})$



Vector Addition and Subtraction

- 점(Point) P 에서 점(Point) Q 의 변위벡터 (Displacement vector)는 q – p 로 계산된다.



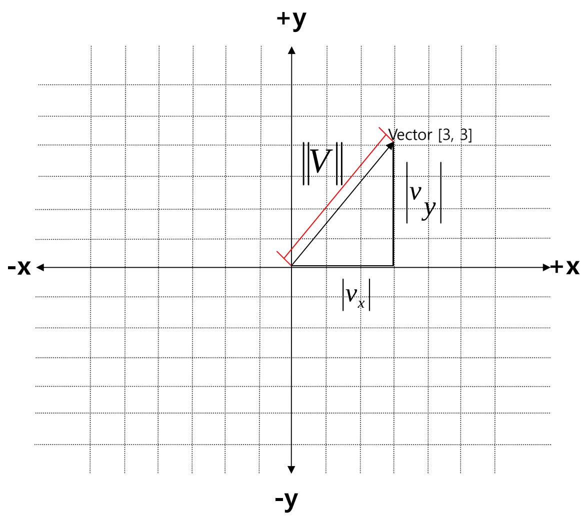
Vector Magnitude (Length)

- 벡터의 크기 (magnitude or length):

Examples: $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{n-1}^2 + v_n^2}$

$$\|(5,-4,7)\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{25+16+49}$$
$$= \sqrt{90}$$
$$= 3\sqrt{10}$$
$$\approx 9.4868$$

Vector Magnitude

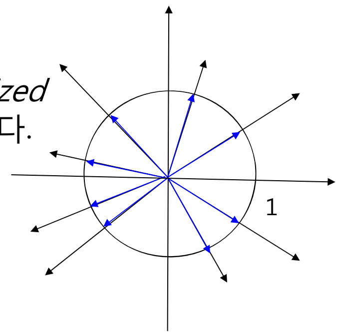


$$\|v\|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2$$
$$\sqrt{\|v\|^2} = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$$

Normalized Vectors

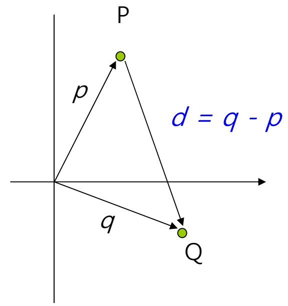
- 벡터의 크기에 상관없이 벡터의 방향만을 필요로 할 때가 있다.
- 단위벡터 (Unit vector)는 벡터의 크기 (magnitude)가 1이다.
- 단위벡터의 다른 이름은 *normalized vectors* 혹은 *normal*이라고 부른다.
- 벡터의 정규화 ("Normalizing" a vector):

$$v_{norm} = \frac{v}{\|v\|}, v \neq 0$$



Distance

- 두 점 P, Q 간의 거리(distance)는 다음과 같이 계산된다.
  - 벡터 p
  - 벡터 q
  - 변위벡터 $d = q - p$
  - 벡터 d*의 길이를 구한다.*
  - distance(P, Q) = $\| d \| = \| q - p \|$



Vector Dot Product

- 두 벡터간의 내적 (Dot product): **u • v**

  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) =$

  $u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_{n-1}v_{n-1} + u_nv_n$

  or

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$u \cdot u = \|u\|^2$$

- 예제:

  $(4, 6) \cdot (-3, 7) = 4*-3 + 6*7 = 30$

  $(3, -2, 7) \cdot (0, 4, -1) = 3*0 + -2*4 + 7*-1 = -15$

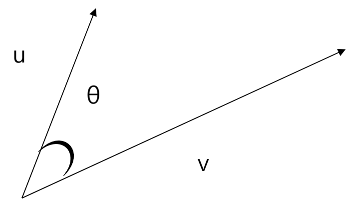
Vector Dot Product

- 두 벡터간의 내적은 벡터 크기 배율을 가진 벡터 간 각도의 코사인(cosine)이다.

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

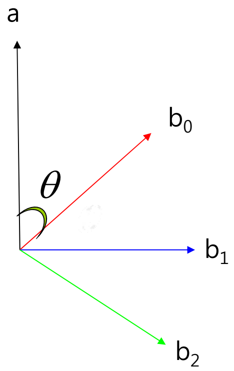
$$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)$$

$$\theta = \operatorname{acos}(u \cdot v), \textit{ where } u, v \textit{ are unit vectors}$$



Dot Product as Measurement of Angle

- 다음은 내적의 특성을 정리한 것이다.



$$a \cdot b_0 > 0 \ \ when\ \ 0^\circ \le \theta < 90^\circ$$

$$a \cdot b_1 = 0 \ \ when\ \ \theta = 90^\circ$$

$$a \cdot b_2 < 0 \ \ when\ \ 90^\circ < \theta \le 180^\circ$$

Projecting One Vector onto Another

- 두 개의 벡터, w, v가 주어지면, 그 중 하나의 벡터 w를 다른 벡터 v에 평행한 성분과 직교하는 성분으로 나눌 수 있다.

  w = w_{par} + w_{per}

  w = αv + u

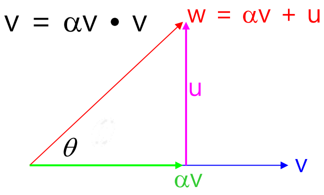
  u는 v에 직교해야 하므로, u • v = 0

  w• v = (αv + u) • v = αv • v + u • v = αv • v

$$\alpha = \frac{w \cdot v}{v \cdot v}$$

$$u = w - \alpha v = w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \boxed{w - \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v}$$

$$\alpha v = w - u = w - w + \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \boxed{\frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v}$$

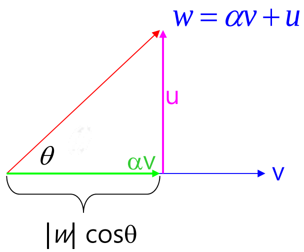


Projecting One Vector onto Another

If v is a unit vector,
then $\|v\| = 1$

$$w_{per} = u = \boxed{w - (w \cdot v)v}$$

$$w_{par} = av = \boxed{(w \cdot v)v}$$



$$\cos\theta = \frac{\|\alpha v\|}{\|w\|} \Rightarrow \|\alpha v\| = \|w\| \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\|u\|}{\|w\|} \Rightarrow \|u\| = \|w\| \sin\theta$$

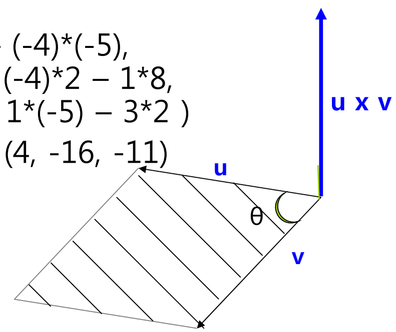
Vector Cross Product

- 벡터의 외적 (Cross product): **u x v**

  (x_1, y_1, z_1) **x** (x_2, y_2, z_2) = (y_1z_2 - z_1y_2,
  z_1x_2 - x_1z_2,
  x_1y_2 - y_1x_2)

- 예제:

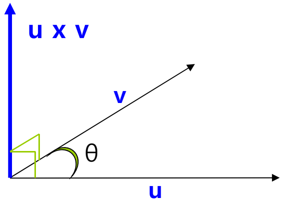
  (1, 3, -4) **x** (2, -5, 8) = (3*8 – (-4)*(-5),
  (-4)*2 – 1*8,
  1*(-5) – 3*2)
  = (4, -16, -11)



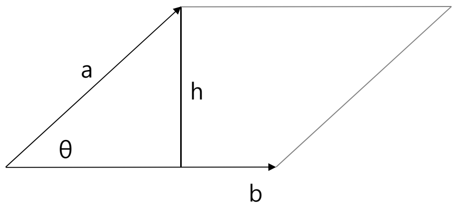
Vector Cross Product

- 두 벡터 간의 외적 (**u x v**)의 크기는 각 벡터의 크기와 두 벡터간 각도의 사인(sine)의 곱이다.

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$$



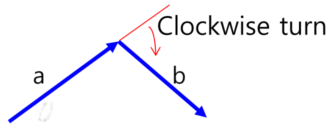
- 평행사변형 (parallogram)의 영역(area)은 *bh*로 계산된다.



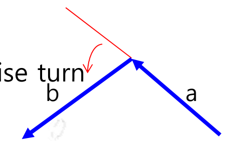
$$\begin{aligned} A &= bh \\ &= b(a\sin\theta) \\ &= \|a\|\|b\|\sin\theta \\ &= \|a \times b\| \end{aligned}$$

Vector Cross Product

- 왼손 좌표계에서는 벡터 u, v가 시계방향(clockwise turn)으로 움직일 때 u x v는 우릴 향하는 방향을 가리키고, 반시계방향 (counterclockwise turn)으로 움직일 때, u x v가 우리로부터 멀어지는 방향을 가리킨다.
- 오른손 좌표계에서는 벡터 u, v가 반시계방향으로 움직일 때 u x v는 우리를 향하는 방향을 가리키고, 시계방향으로 움직일 때 u x v는 우리로부터 멀어지는 방향을 가리킨다.



Left-handed Coordinates



Right-handed Coordinates

Linear Algebra Identities

Identity	Comments
u + v = v + u	벡터 덧셈 교환법칙
u – v = u + (-v)	벡터 뺄셈
(u+v)+w = u+(v+w)	벡터 덧셈 결합법칙
α(βu)=(αβ)u	스칼라-벡터 곱셈 결합법칙
α(u + v) = αu + αv (α + β)u = αu + βu	스칼라-벡터 분배법칙
$\|\alpha v\| = \|\alpha\|\|v\|$	스칼라의 곱
$\|v\| \geq 0$	벡터의 크기는 양수 (nonnegative)
$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$	피타고리안 법칙 (Pythagorean theorem)
$\|u\| + \|v\| \geq \|u+v\|$	벡터 덧셈 삼각법칙 (Triangle rule)
u · v = v · u	내적(dot product) 교환법칙
$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$	내적(dot product)을 이용한 벡터의 크기 정의

Linear Algebra Identities

Identity	Comments
α(u · v) = (αu) · v = u · (αv)	벡터의 내적과 스칼라 곱 결합법칙
u · (v + w) = u · v + u · w	벡터 덧셈/뺄셈과 내적 분배법칙
u **x** u = 0	벡터 자신의 외적 (cross product)은 0
u **x** v = -(v **x** u)	벡터의 외적은 반교환법칙 (anti-commutative)
u **x** v = (-u) **x** (-v)	벡터의 외적은 각 벡터의 역에 외적과 같다
α(u **x** v) = (αu) **x** v = u **x** (αv)	벡터의 외적과 스칼라 곱 결합법칙
u **x** (v+w) = (u**x**v) + (u**x**w)	두 벡터의 덧셈과 다른 벡터와의 외적은 분배법칙을 성립
u · (u **x** v) = 0	Dot product of any vector with cross product of that vector & another vector is 0

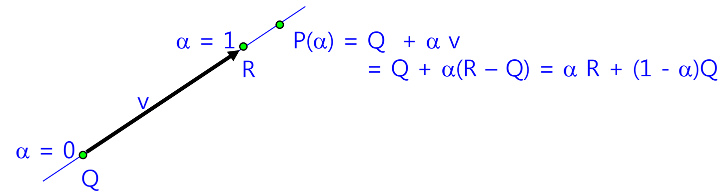
Geometric Objects

- Line
  - 2 points
- Plane
  - 3 points
- 3D objects
  - Defined by a set of triangles
  - Simple convex flat polygons
  - hollow

Lines

- 직선 (line)은 점과 벡터의 덧셈 (또는 두 점의 뺄셈)이다.
- 직선의 매개변수 형식 (parametric form): $P(\alpha) = P_0 + \alpha v$
  - P_0 는 임의의 점, v는 임의의 벡터
  - 매개 변수 α를 변경함으로써 직선 위에 점들이 생성
- $v = R - Q$

  $P = Q + \alpha v = Q + \alpha(R - Q) = \alpha R + (1 - \alpha)Q$
- $P = \alpha_1 R + \alpha_2 Q$ where $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$



Lines, Rays, Line Segments

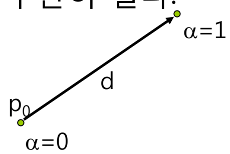
- 직선 (line)은 양방향으로 무한히 길다
- 선분 (line segment)는 두 점 (two endpoints) 사이의 선 조각이다. $0 <= \alpha <= 1$
- 방사선 (ray)는 한 점으로부터 한 방향으로 무한히 길다. $\alpha >= 0$
- 직선 (line)의 정의:

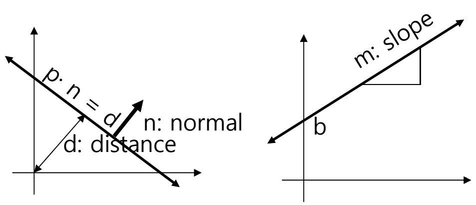
  $p(\alpha) = p_0 + \alpha d$ (parametric)

  $y = mx + b$ (explicit)

  $ax + by = d$ (implicit)

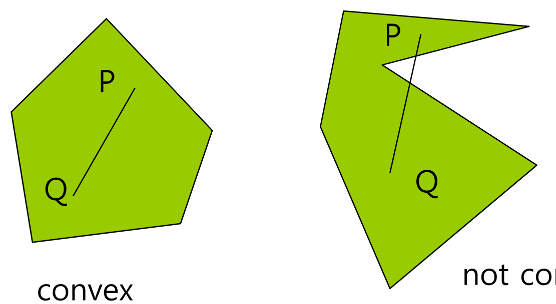
  $p \bullet n = d$





Convexity

- 볼록한(convex) 객체는 객체 내에 임의의 두 점을 연결하는 선분 위에 놓인 임의의 점이 객체 내에 있다.

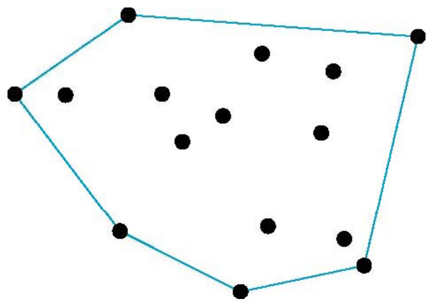


convex

not convex

Convex Hull

- 컨벡스 헐(convex hull)이란 점들의 집합 $P_1, P_2, \ldots, P_n$을 포함하는 가장 작은 볼록 객체이다.
- 주어진 점들을 축소 포장 ("shrink wrapping")함으로 얻는다.



Affine Sums

- N개의 점 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 에 의해 정의되는 객체를 포함하도록 하는 아핀 합은

  $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$

  $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 1$
- 추가적인 제한 $\alpha_i >= 0$, i=1,2, ..,n하에서

  n개의 점의 아핀 합에 의하여 만들어진 점들의 집합은 컨벡스 헐 (*convex hull*)이라고 불린다.
- 컨벡스 헐이 $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$에서 점들의 쌍을 연결하는 모든 선분을 포함하는 것을 확인할 수 있다.

Linear/Affine Combination of Vectors

- 벡터의 선형조합 (linear combination of m vectors)
  - m개의 벡터 $v_1, v_2, .. v_m$
  - $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_m v_m$ where $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_m$ are scalars
- 만약 벡터의 선형조합의 스칼라 값들 $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_m$ 의 합이 1이면 어파인 조합(affine combination)이 된다.
  - $\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_m = 1$

Convex Combination

- 추가적인 제한, 즉 $\alpha_i >= 0$, i=1,2, ..,m하에서 m개의 점의 아핀 합에 의하여 만들어진 점들의 집합은 컨벡스 헐 (*convex hull*)이라고 불린다.
- 따라서, 아래의 조건을 만족하는 벡터의 선형조합은 컨벡스(convex)이다.

  $\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_m = 1$

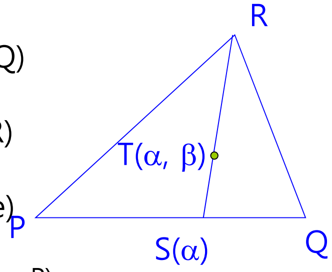
  and

  $\alpha_i \geq 0$ for i=1,2, .. m

  α_i 는 0과 1 사이에 존재
- Convexity
  - Convex hull

Plane

- 평면은 매개변수형 직선을 확장함으로써 정의할 수 있다.
- 3 점 P, Q, R이 있다고 가정하자.
- P와 Q를 잇는 선분 (line segment PQ)
  - $S(\alpha) = \alpha P + (1 - \alpha)Q$
- S와 R을 잇는 선분 (line segment SR)
  - $T(\beta) = \beta S + (1 - \beta)R$
- P, Q, R에 의해 결정되는 평면 (plane)
  - $T(\alpha, \beta) = \beta(\alpha P + (1 - \alpha)Q) + (1 - \beta)R$
    $= P + \beta(1 - \alpha)(Q - P) + (1 - \beta)(R - P)$
  - $0 \le \alpha, \beta \le 1$인 $T(\alpha, \beta)$의 모든 점은 P, Q, R에 의해 형성되는 삼각형 내에 위치한다.

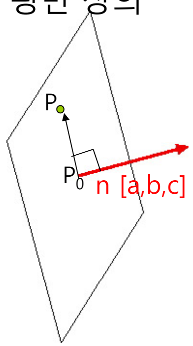


Plane

- 하나의 점 (point) P_0와 두 개의 평행하지 않는 벡터 (two nonparallel vectors) u, v에 의해 결정되는 평면의 식
  - $T(\alpha, \beta) = P_0 + \alpha u + \beta v$
  - $P - P_0 = \alpha u + \beta v$ (P는 평면의 한 점)
- u, v의 외적 n을 이용하면 평면의 방정식은 다음과 같다.
  - $n \bullet (P - P_0) = 0$ (where $n = u \times v$ and n is a normal vector)

Plane

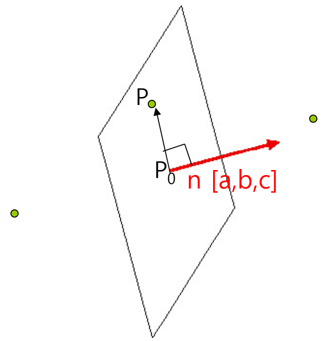
- 평면은 하나의 법선 벡터 (normal vector) n과 평면 상의 점 p_0으로 표현된다.
  - Plane (n, d) where n (a, b, c)
  - $ax + by + cz + d = 0$
  - $n \bullet p + d = 0$
    $d = -n \bullet p$



- 평면 위의 점 p에 대해, $n \bullet (p - p_0) = 0$
- 만약 평면의 법선 벡터 n이 단위 길이라면, $n \bullet p + d$로 평면에서 점 p까지의 부호를 가진 가장 짧은 거리 (the shortest signed distance)를 얻을 수 있다: $d = -n \bullet p$

Relationship between Point and Plane

- 점 p과 평면 (n, d)의 공간 관계
  - 만약 $n \bullet p + d = 0$라면, p는 평면에 있다.
  - 만약 $n \bullet p + d > 0$라면, p는 평면의 바깥쪽에 있다.
  - 만약 $n \bullet p + d < 0$라면, p는 평면의 안쪽에 있다.



Plane Normalization

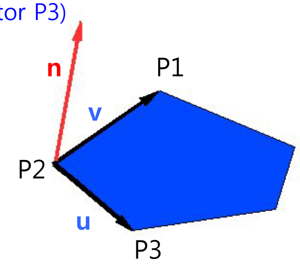
- 평면의 정규화 (normalization)
  - 평면의 법선 벡터 (normal)를 정규화
  - 법선 벡터의 길이가 상수 d에 영향을 주기 때문에, d도 역시 정규화

$$\frac{1}{\|\mathrm{n}\|}(\mathrm{n},\mathrm{d})=\left(\frac{n}{\|n\|},\frac{d}{\|n\|}\right)$$

Computing a Normal from 3 Points in Plane

- 폴리곤의 정점 자료에서 법선을 구하라.
  - 폴리곤의 법선벡터 (normal)는 2개의 two non-collinear edges를 계산한다. (assuming that no two adjacent edges will be collinear)
  - 그리고, 외적 (cross product)을 구한 후 정규화(normalize) 한다.

```
void computeNormal(vector P1, vector P2, vector P3)
{
	vector u, v, n, y(0, 1, 0);
	u = P3 – P2;
	v = P1 – P2;
	n = cross(u, v);
	if (n.length()==0)
		return y;
	else
		return n.normalize();
}
```



Computing a Distance from Point to Plane

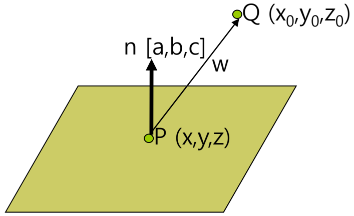
- 공간에 한 평면 (n, d)과 평면 밖의 한 점 Q과 가장 가까운 거리를 구하라.
  - 평면의 법선 벡터(normal vector)가 n 이고, D는 평면 상의 한 점 P와 점 Q간의 거리

$$w=Q-P=[x_0-x,y_0-y,z_0-z]$$

$$D=\frac{|n\bullet w|}{\|n\|}$$

$$=\frac{|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

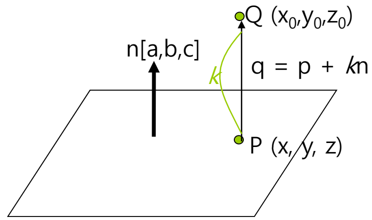
$$=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



$$\text{Projecting } w \text{ onto } n: w_{\|}=n\frac{w\cdot n}{\|n\|^2} \;\&\; \|w_{\|}\|=\frac{|w\cdot n|}{\|n\|}$$

Closest Point on the Plane

- 공간에 하나의 점 Q에서 가장 가까운 평면 (n, d)상의 점 P를 구하라
  - p = q – kn (k는 점 Q에서 plane과의 the shortest signed distance)
  - n이 단위벡터(unit vector)인 경우,
    - k = n•q + d
    - p = q – (n•q + d)n



$$\textbf{Distance(q, plane)}=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\textit{where } q(x_0,y_0,z_0) \textit{ and Plane } ax+by+cz+d=0$$

$$\textbf{Distance(q, plane)}=n\cdot q+d \;\; (n \textit{ is a unit vector})$$

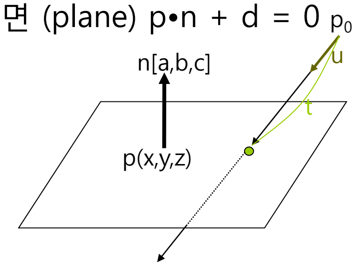
Intersection of Ray and Plane

- 광선 (ray) **p**(*t*) = **p**$_0$ + *t***u** & 평면 (plane) p•n + d = 0
- 광선/평면의 교차점:

$$(\mathrm{p}_0 + t\mathrm{u})\cdot\mathrm{n} + d = 0$$

$$t\mathrm{u}\cdot\mathrm{n} = -d - \mathrm{p}_0\cdot\mathrm{n}$$

$$t = \frac{-(\mathrm{p}_0\cdot\mathrm{n} + d)}{\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}}$$



- 만약 광선이 평면과 평행하다면, denominator **u•n**=0 따라서 광선은 평면과 교차하지 않는다.
- 만약 *t* 값이 범위 [0, ∞)내에 있지 않으면, 광선은 평면과 교차하지 않는다.
- $\mathrm{p}\left(\frac{-(\mathrm{p}_0\cdot\mathrm{n}+d)}{\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}}\right) = \mathrm{p}_0 + \frac{-(\mathrm{p}_0\cdot\mathrm{n}+d)}{\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}}\mathrm{u}$

Matrix

- 다음과 같이 사각형 형태로 표기한 숫자 배열을 행렬 M (***r*** x ***c*** matrix) 라고 한다.
  - 가로로 배열된 행렬을 **행 (row)**
  - 세로로 배열된 행렬을 **열 (column)**
  - Mij는 행 i 와 열 j에 있는 **원소 (element)**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \Big\} \; r(2) \text{ rows}$$

$\underbrace{\qquad}_{c(2)\text{ columns}}$

Matrix

2x5 matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 7/8 & 8 \\ -3 & 4 & 3/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

m$_{12}$= -4

4x3 matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 \\ -5 & 4 & 3 \\ 12 & 3/8 & -1 \\ 1/2 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

m$_{42}$= 18

m$_{ij}$* 는 *M 행렬의 행 ***i*** 와 열 ***j*** 원소

Square Matrix

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Nondiagonal elements

Diagonal elements

- n x n 행렬을 n 차 정방행렬 (square matrix)라 한다. e.g. 2x2, 3x3, 4x4
- Diagonal elements vs. Non-diagonal elements

Identity Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 항등행렬 혹은 단위행렬 (Identity Matrix)은 I 또는 I_n로 표시한다.
- 주 대각선이 전부 1이고, 나머지 원소는 0을 값으로 갖는 ***n*** x ***n*** 정방행렬이다.
- M I = I M = M

Vectors as Matrices

- n-dimension 벡터는 1x***n*** 행렬 또는 ***n***x1 행렬로 표현
  - 1xn 행렬은 행 벡터 (또는 행 행렬이라고도 부름)
  - nx1 행렬은 열 벡터 (또는 열 행렬이라고도 부름)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Transpose Matrix

- M (rxc matrix)의 전치행렬(Transpose of M)은 M^T으로 표시하며 cxr matrix 로 변환된다.
  - $M^T_{ij} = M_{ji}$
  - $(M^T)^T = M$
  - $D^T = D$ for any diagonal matrix D.

$$\begin{pmatrix} a & m & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ m & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Transposing Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Matrix Scalar Multiplication

- 행렬의 스칼라 곱 (Multiplying a matrix **M** with a scalar α = α **M)**

$$\alpha\mathbf{M} = \alpha\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha m_{11} & \alpha m_{12} & \alpha m_{13} \\ \alpha m_{21} & \alpha m_{22} & \alpha m_{23} \\ \alpha m_{31} & \alpha m_{33} & \alpha m_{33} \end{pmatrix}$$

Two Matrices Addition

- Matrix C는 A (r x c matrix)와 B (r x c matrix)의 덧셈은 r x c matrix이다.
- 각 원소 $\mathbf{c_{ij}}$ 는 A의 ij^{th} 원소와 B의 ij^{th} 원소의 합이다.
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

1+3

$$\underset{r \times c}{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ 10 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}} + \underset{r \times c}{\begin{pmatrix} \boxed{3} & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ 8 & -9 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{r \times c}{\begin{pmatrix} \boxed{4} & 10 & 7 \\ 16 & 4 & 4 \\ 12 & -2 & 6 \end{pmatrix}}$$

Two Matrices Multiplication

- Matrix C는 A (rxn matrix)와 B (nxc matrix)의 곱 rxc이다.
- 각 원소 $\mathbf{c_{ij}}$ 는 A의 i^{th} row와 B의 j^{th} column의 vector dot product이다.
- $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

3+18+48

$$\underset{r \times n}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 10 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}} * \underset{n \times c}{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ 8 & -9 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{r \times c}{\begin{pmatrix} \boxed{69} & -35 & 52 \\ -10 & 115 & -10 \\ 70 & 38 & 75 \end{pmatrix}}$$

must match

columns in result

rows in result

Multiplying Two Matrices

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \boxed{c_{24}} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_{24} = a_{21}m_{14} + a_{22}m_{24}}$$

Matrix Operation

- MI = IM = M (I는 단위행렬)
- A + B = B + A : 행렬-행렬 덧셈의 교환법칙
- A + (B + C) = (A + B) + C : 행렬-행렬 덧셈의 결합법칙
- AB ≠BA : 행렬-행렬 곱의 교환법칙은 성립되지 않는다.
- (AB)C = A(BC) : 행렬-행렬 곱의 결합법칙
- ABCDEF = ((((AB)C)D)E)F = A((((BC)D)E)F) = (AB)(CD)(EF)
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$: 스칼라-행렬 곱
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$: 스칼라-행렬 곱
- (vA)B = v (AB)
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(M_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}M_n)^T = M_n^TM_{n-1}^T \ldots M_3^TM_2^TM_1^T$

Matrix Determinant

- 행렬식의 값 (The determinant of a square matrix M)은 **|M|** 혹은 **“det M”** 으로 표시된다.
- Non-square matrix의 determinant 는 정의되지 않는다.

$$|M| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &m_{11}(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) + \\ &m_{12}(m_{23}m_{31} - m_{21}m_{33}) + \\ &m_{13}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) \end{aligned}$$

Inverse Matrix

- 정방행렬 M (square matrix)의 역행렬(Inverse of M)은 M^{-1}으로 표시한다.
- $M^{-1} = \dfrac{adjM}{|M|}$
- $(M^{-1})^{-1}$ =M
- $M(M^{-1}) = M^{-1}M = I$
- The determinant of a non-singular matrix (i.e, invertible) is nonzero.
- The *adjoint* (수반행렬) of M, denoted **“adj M”**은 여인자 행렬의 전치행렬 (The transpose of the matrix of cofactors)

$$adjM = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T$$

Cofactor of a Square Matrix & Computing Determinant using Cofactor

- 여인자 (*Cofactor of M*)는 정방행렬 M의 i행과 j열을 제거하여 만든 소행렬(Minor of M)의 행렬식 (the signed determinant)
- $C_{ij} = (-1)^{ij} \, | M^{\{ij\}} |$
- 코펙터 (cofactor)를 사용한 n x n determinant 계산:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(-1)^{i+j}|M^{\{ij\}}|$$

$$|M| = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} = m_{11}\begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} - m_{12}\,|M^{\{12\}}| + m_{13}\,|M^{\{13\}}| - m_{14}\,|M^{\{14\}}|$$

Minor of a Matrix

- 소행렬 (Minor)는 정방행렬 M의 i행과 j열을 제거하여 만든 부분행렬 $M^{\{ij\}}$

$$M = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad M^{\{12\}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinant, Cofactor, Inverse Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

$$C = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}$$

$$adjM = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

Determinant, Cofactor, Inverse Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M = & \; m_{11}(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) \\ & - m_{12}(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}) \\ & + m_{13}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} (m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) & -(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}) & (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) \\ -(m_{12}m_{33} - m_{13}m_{32}) & (m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) & -(m_{11}m_{32} - m_{21}m_{31}) \\ (m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}) & -(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) & (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) \end{pmatrix}$$

$$adjM = \begin{pmatrix} (m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) & -(m_{12}m_{33} - m_{13}m_{32}) & (m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}) \\ -(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}) & (m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}) & -(m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}) \\ (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) & -(m_{11}m_{32} - m_{21}m_{31}) & (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{adjM}{\det M}$$

Multiplying a Vector and a Matrix

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\mathbf{p}_x + y\mathbf{q}_x + z\mathbf{r}_x & x\mathbf{p}_y + y\mathbf{q}_y + z\mathbf{r}_y & x\mathbf{p}_z + y\mathbf{q}_z + z\mathbf{r}_z \end{pmatrix}$$

$$= x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{r}$$

- 벡터-행렬의 곱을 이용하여 좌표계 변환 (coordinate space transformation)을 표현할 수 있다.
  uM = v // 행렬 M이 벡터 u를 벡터 v로 변환

Multiplying a Vector and a Matrix

- OpenGL (Column-Major Order)에서 벡터-행렬의 곱
  v = M * u // 행렬 M이 벡터 u를 벡터 v로 변환

v = M * u

$$\begin{pmatrix} x m_{11} + y m_{12} + z m_{13} \\ x m_{21} + y m_{22} + z m_{23} \\ x m_{31} + y m_{32} + z m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$